Apunte Docente
Fundamentos Matemáticos
FUNCIONES

Dominio y Recorrido.
Función lineal.
Función valor absoluto.
Función cuadrática.
Traslación de funciones.
Función raíz cuadrada.
Función cúbica.
Función racional.
Operaciones de funciones.
Composición de funciones.
Funciones por tramos.
Función inversa.
Funciones trigonométricas.
Función exponencial.
Función Logarítmica.

Verónica Riquelme - Escuela de Ingeniería Comercial - Universidad Finis Terrae

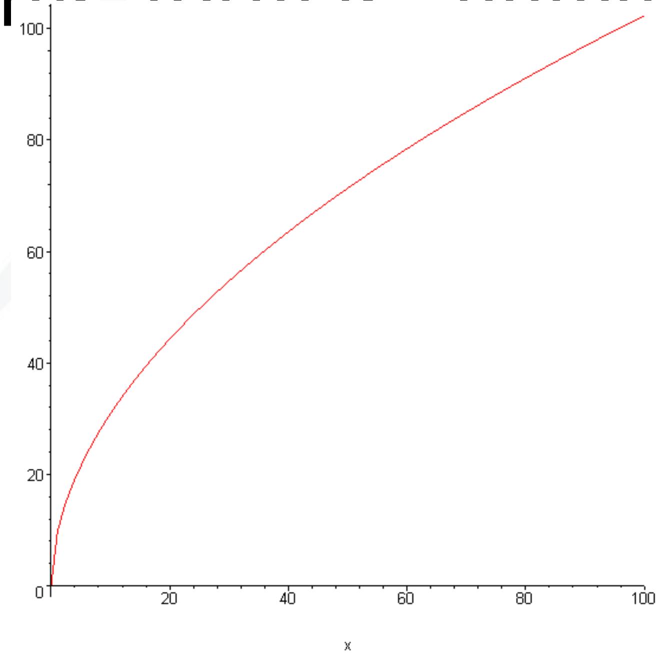
FUNCIONES

En términos generales, una función relaciona los elementos de dos conjuntos mediante una determinada regla de asociación.

Una función se puede expresar de tres formas: numérica, algebraica y gráfica.

X % estímulo	Y % respuesta
10	31
30	55,1
50	72
70	85,6

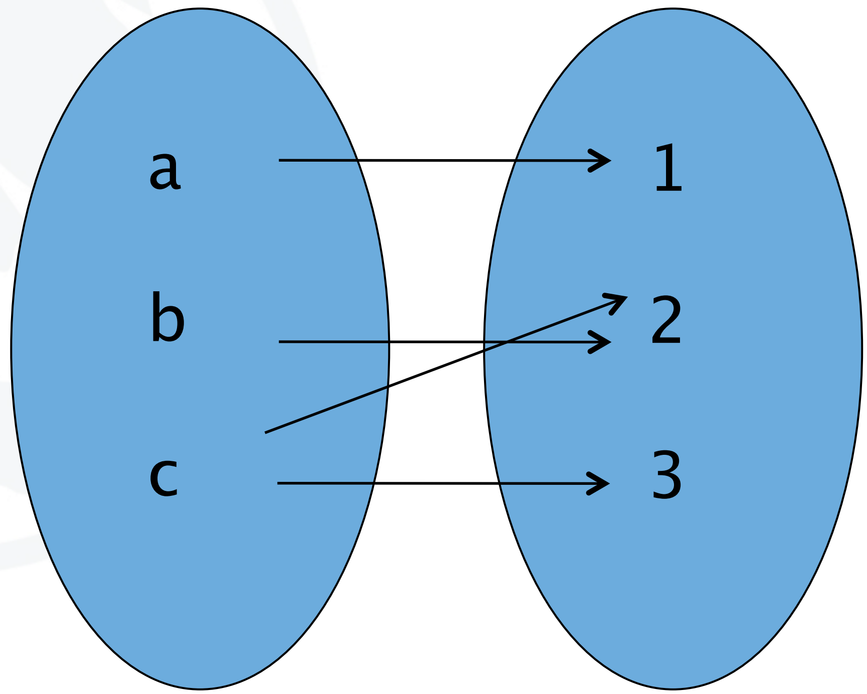
$$R = 9{,}33 \cdot x^{0{,}52}$$

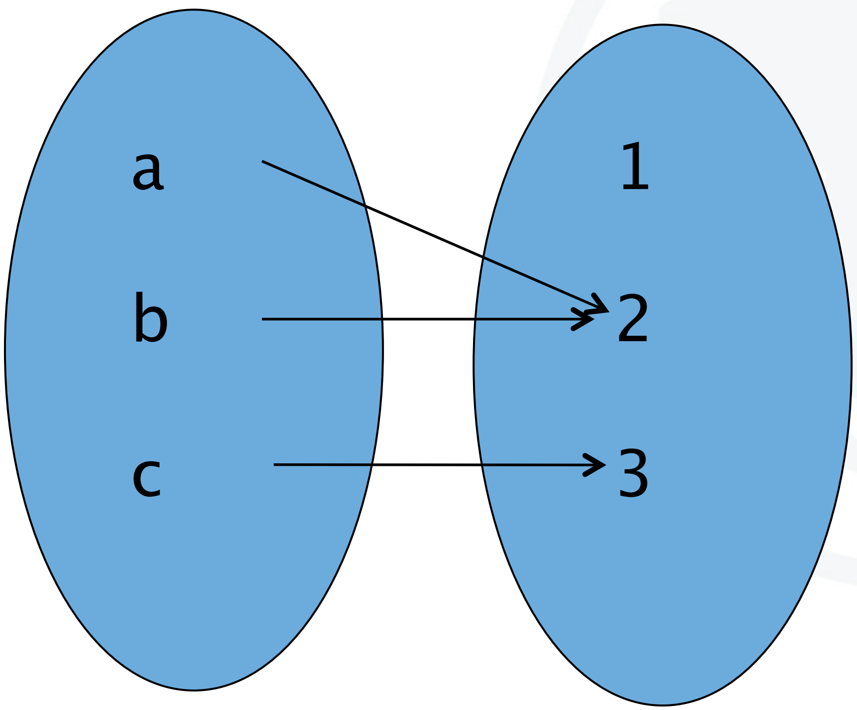


Función

<u>Definición</u>: Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función es una relación en la que a cada valor del dominio le corresponde exactamente un valor del recorrido.

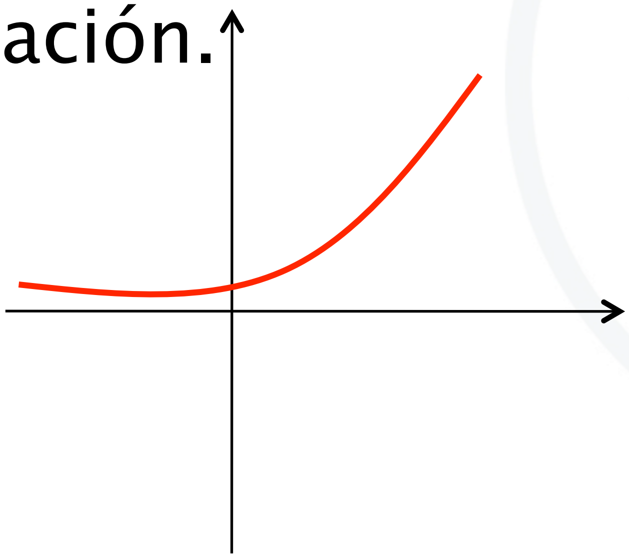
No es función



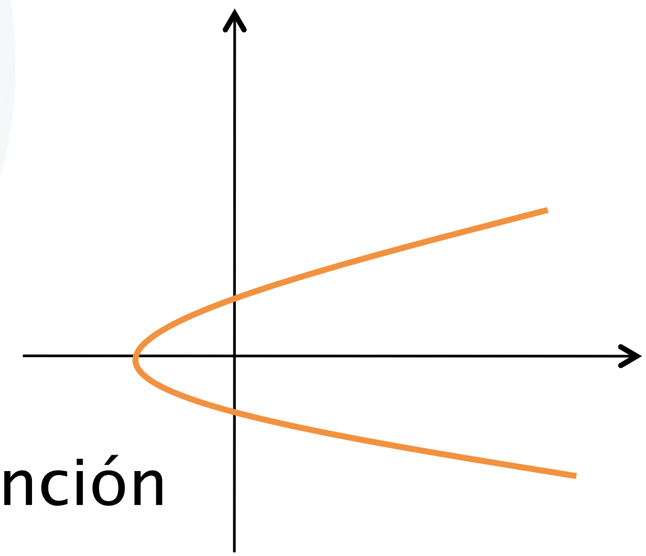


Es función

En un gráfico en el plano **cartesiano** se puede determina
que una relación es función, si al trazar cualquier recta paralela al "eje y" ésta corta en **un sólo** punto el gráfico de la relación.



Es función



No es función

Ejercicios.

Determine cual de las siguientes relaciones son función:

$$A = \{(x, y) / 2y - 3x = 4\}$$

$$B = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$$

$$C = \{(x, y) / y = x^2\}$$

$$D = \{(x, y) / y^2 = x\}$$

$$E = \{(x, y) / 4x^2 + 9y^2 = 36\}$$

Dominio (Dom f) y recorrido (Rec f) de una función

El **Dominio** de f es el conjunto de todos los valores posibles de x.

$$Dom\, f = \{x \in A /\ y = f(x)\}$$

El **Recorrido** o imagen es el conjunto de todos los valores posibles de y.

$$Rec\, f = \{y \in B /\ existe\ un\ x \in A,\ y = f(x)\}$$

En la igualdad $f(x)=y$, llamamos a y "**imagen de x**", a x "**preimagen de y**".

Ejercicios

1. Determine el dominio de las siguientes funciones:

$a.\ h(x) = \dfrac{5x+4}{9x-2}$ $b.\ p(x) = \sqrt{5-2x}$

$c.\ j(x) = \log(7x+10)$

2. Determine el recorrido de las siguientes funciones:

$a.\ g(x) = 1-3x$ $b.\ h(x) = \dfrac{2x+4}{x-5}$

$c.\ m(x) = x^2+4x+3$

Evaluación de funciones

El evaluar una función quiere decir que determinaremos la magen de x (reemplazamos el valor de x en la función).

Ejemplo:

1. Si $f(x) = 5x + 3 \Rightarrow f(-1) = 5 \cdot -1 + 3 = -2$

$$Calcule \qquad f(2), \;\; f(0), \;\; f(-3), \; f(a), \; f(a+b)$$

. Construya una tabla con dos imágenes y grafique la siguiente función:

$$g(x) = 3x - 1$$

ntersección de una función con los ejes coordenados

Si $y=f(x)$ es una función, las intersecciones de ésta con los ejes se determinan según:

ntersección con el Eje y ($x=0$)

Por lo que el punto de intersección tiene las coordenadas:

$(0,f(0))$

ntersección con el Eje x ($y=0$)

En este caso debemos reemplazar la imagen $y=0$ formándose una ecuación donde debemos despejar la variable x.

1. Función Lineal

La función lineal es una función del tipo:

$$f(x) = mx + n$$

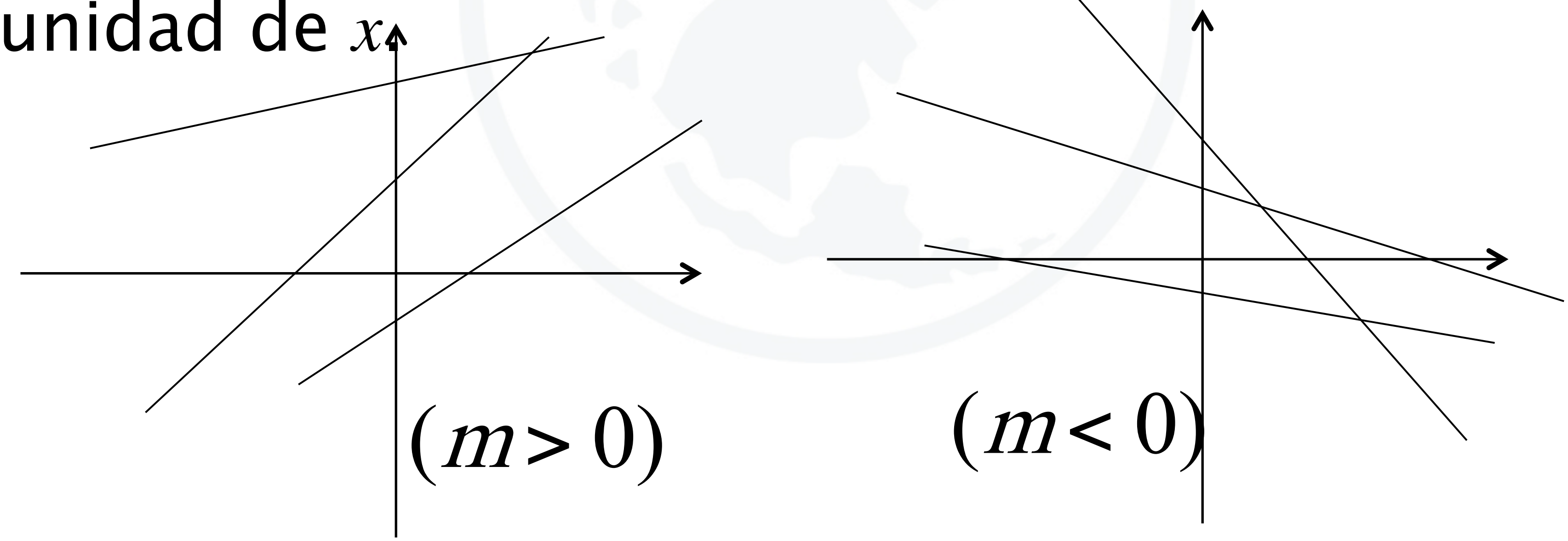
Donde

m: es la pendiente de la recta.

n: es la intersección de la recta con el eje y.

Gráfico de la función lineal

El gráfico de la función lineal es una recta, que sube (creciente) si su pendiente es positiva y baja (decreciente) si su pendiente es negativa. El significado de la pendiente es el aumento(+) o disminución(–) de y debido al aumento de 1 unidad de x.



Ejercicio

Grafique las siguientes funciones lineales y determine las intersecciones con los ejes.

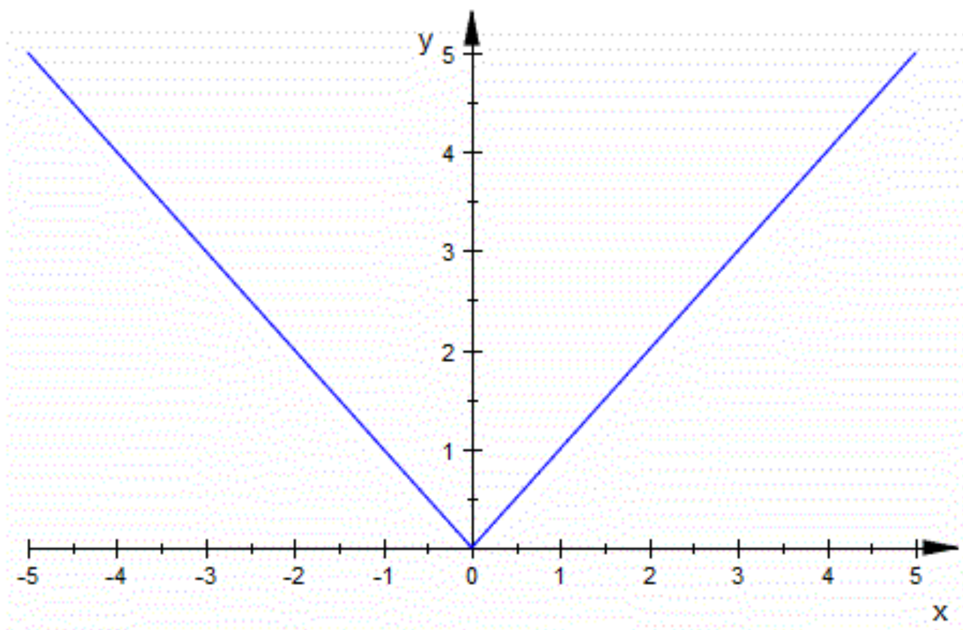
1. $f(x) = 4x - 3$

2. $p(x) = 5 - 3x$

2. Función Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x > 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

$$Dom\ f = IR \ ; \mathrm{Re}\, c\ f = IR_0^+$$



Ejercicios

Grafique las siguientes funciones, determinando intersección con los ejes coordenados:

1. $f(x) = |x-1|$

2. $f(x) = |2x-4|$

3. $f(x) = \left|\dfrac{x+3}{2}\right|$

4. $f(x) = -|x-6|$

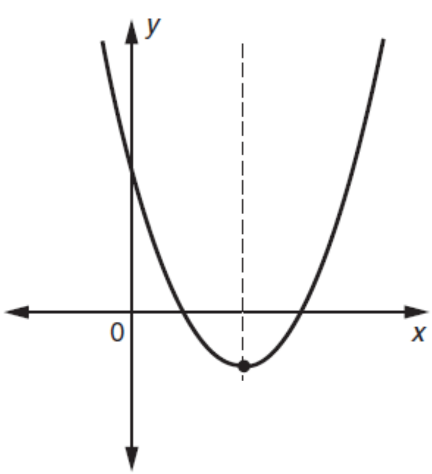
3. Función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$

Su gráfico es una parábola, donde el punto característico de ésta es el VÉRTICE (V).

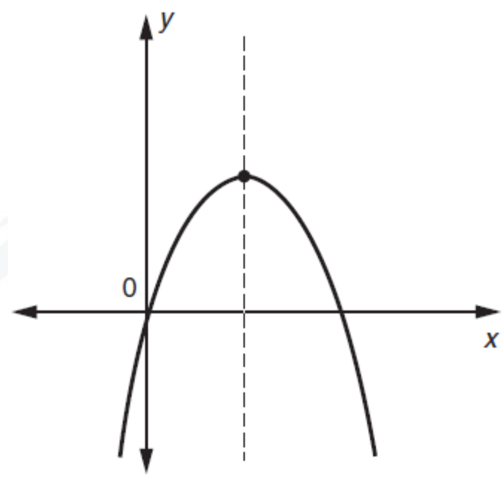
$$V=\left(\frac{-b}{2a},\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Si $a>0$ la función tiene un mínimo en el vértice V.

Si $a<0$ la función tiene un máximo en el vértice V.



a > 0



a < 0

Ejercicios

Dadas las siguientes funciones cuadráticas determine vértice, intersecciones con los ejes coordenados, s tienen máximo o mínimo, dominio y recorrido. Grafique

1. $f(x) = x^2 - 6x + 7$

2. $g(x) = -x^2 - 4x - 3$

3. $h(x) = 2x^2 - 4x + 7$

Ejercicios de aplicación.

1. La función de demanda es una relación matemática que expresa la forma en que la cantidad demandada de un producto varía según el precio en que se venda. La función de demanda de un producto determinado es:

$$N(p) = p^2 - 70p + 1225$$

Donde N es el número de unidades demandadas y p es el precio en dólares.

Determine la cantidad demandada a un precio de 10 dólares y determine el precio al cual se venderá el mínimo de unidades.

2. Una empresa tiene costos fijos mensuales de 2000 dólares y costo variable por unidad de su producto es de 25 dólares.

a. Determine la función del costo total.

b. El ingreso I obtenido por vender x unidades está dado por $I(x) = 60x - 0{,}01x^2$

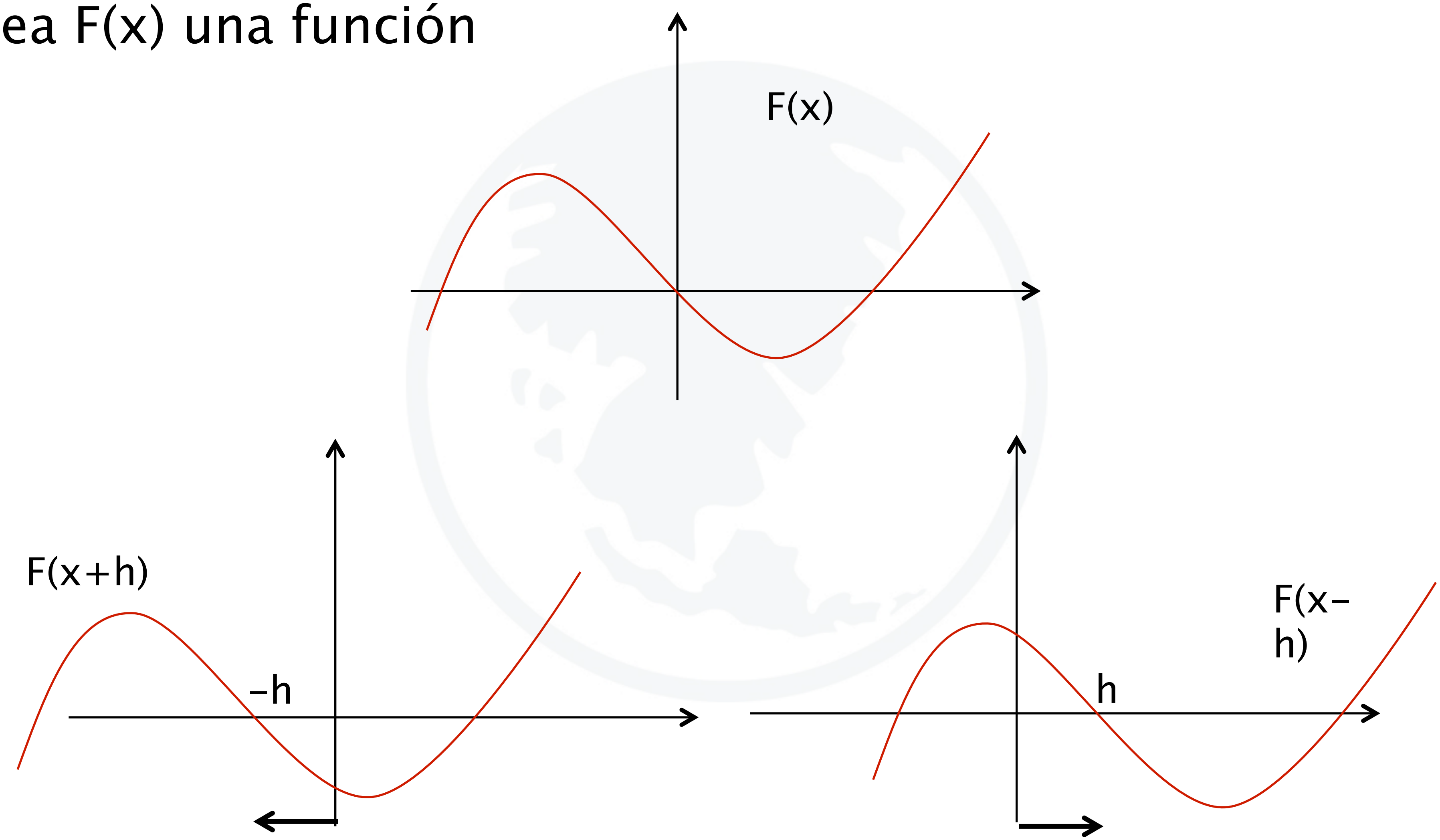
Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. ¿Cuál es el ingreso máximo?

c. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima. ¿Cuál es esta utilidad máxima?

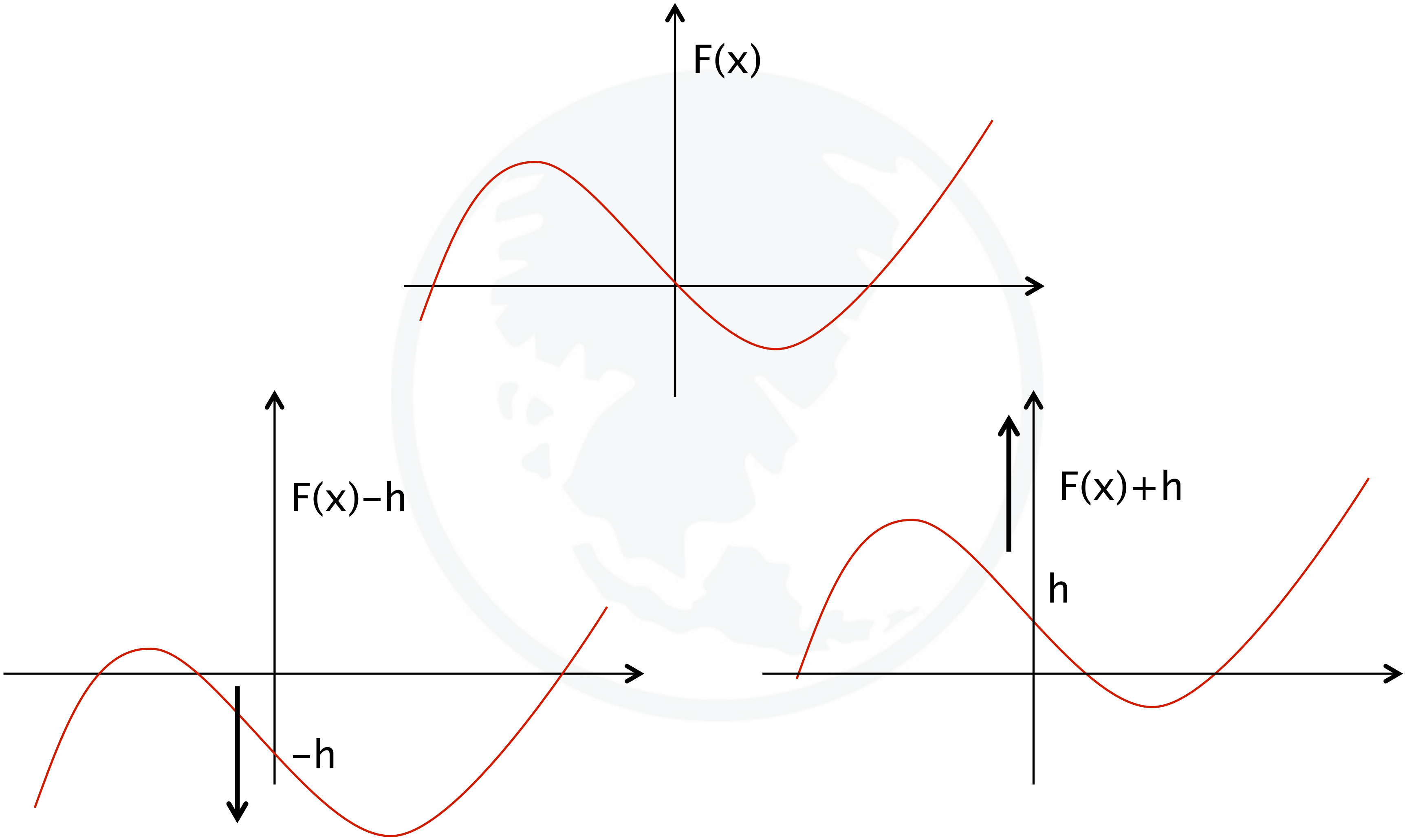
3. El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x)=20-0.06x+0{,}0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el

Traslación de funciones (horizontal)

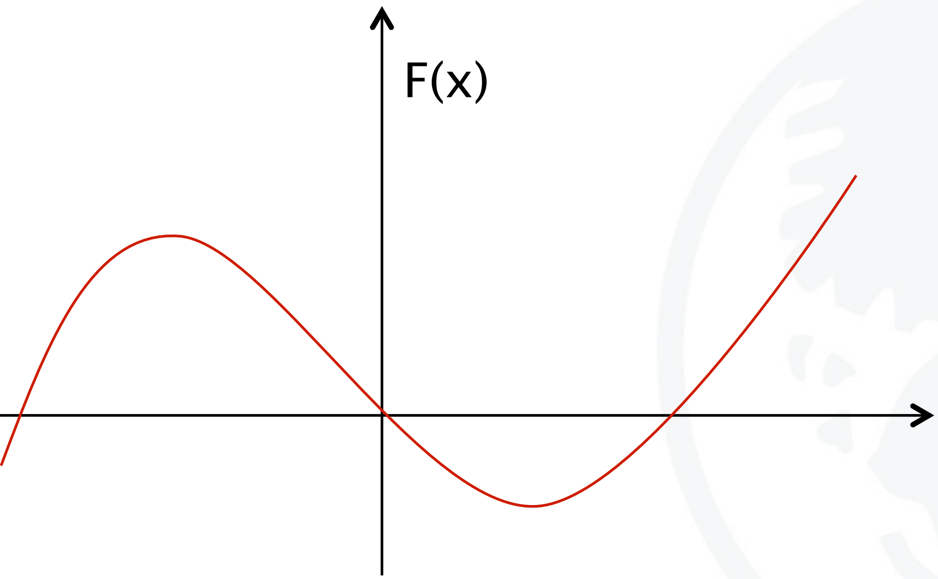
Sea F(x) una función

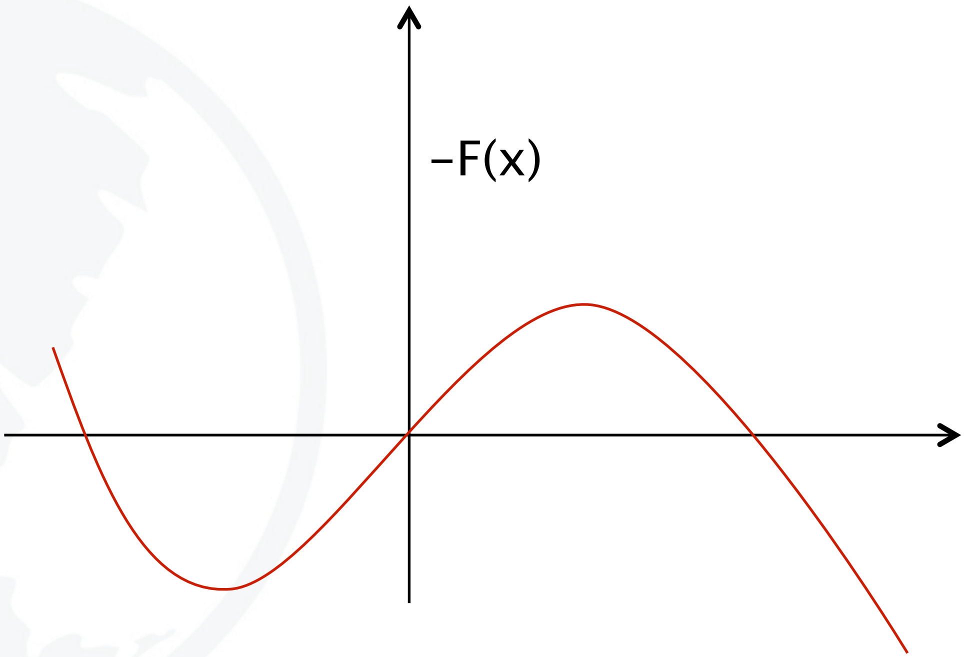


Traslación de funciones (vertical)

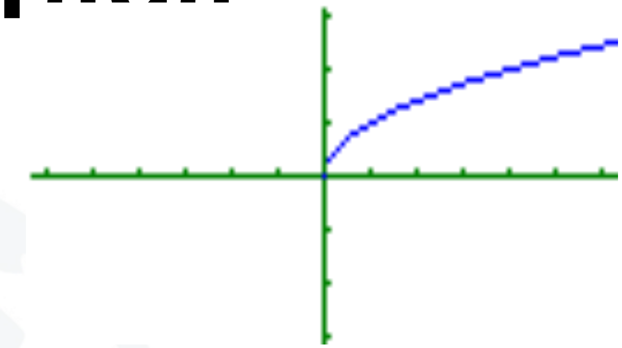


Cambio de signo de una función F(x) cualquiera





4. Función raíz cuadrada

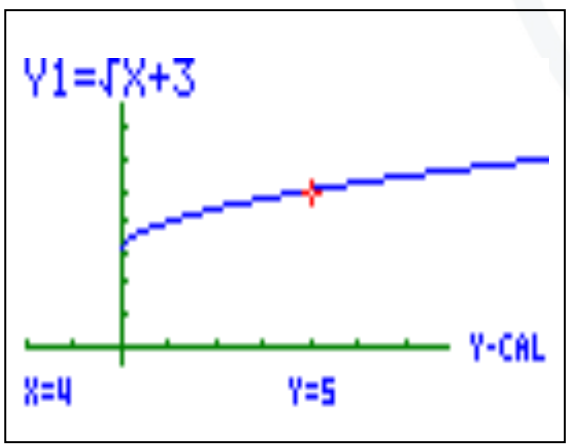


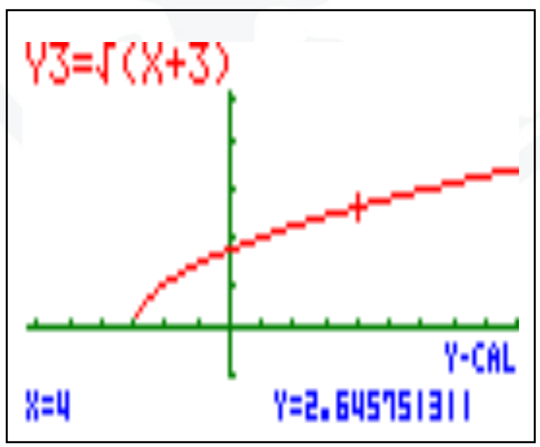
$$f: IR_0^+ \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow \sqrt{x}$$

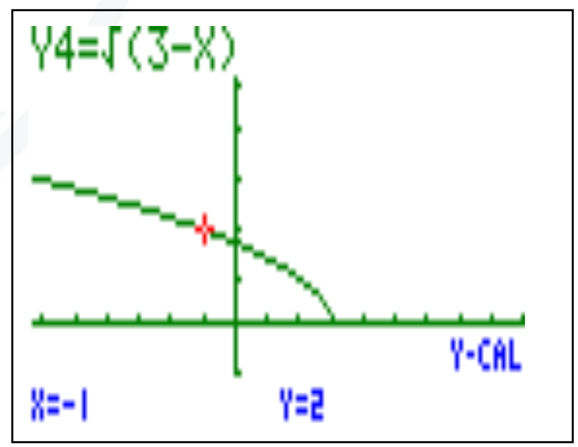
Notar que el recorrido de la función es IR_0^+

Ejemplos: Para las siguientes funciones se analizará sus dominios, recorridos, intersección con los ejes y gráfico.

$f(x) = \sqrt{x} + 3$ $\quad g(x) = \sqrt{x+3}$ $\quad h(x) = \sqrt{3 - x}$







Ejercicios:
Grafique las siguientes funciones y determine dominio y recorrido

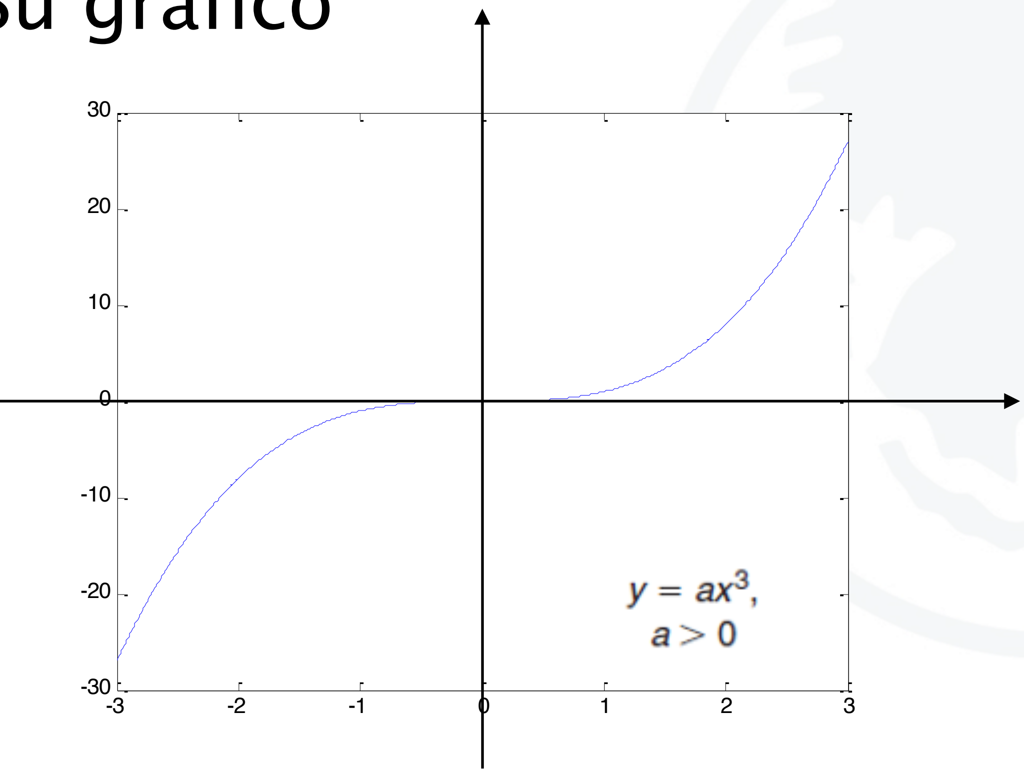
1. $f(x) = \sqrt{x} - 3$
2. $f(x) = -\sqrt{x} - 3$
3. $f(x) = 3\sqrt{x}$
4. $f(x) = \sqrt{-(x+3)}$
5. $f(x) = -\sqrt{-(x+3)}$
6. $f(x) = \sqrt{x} + 3$

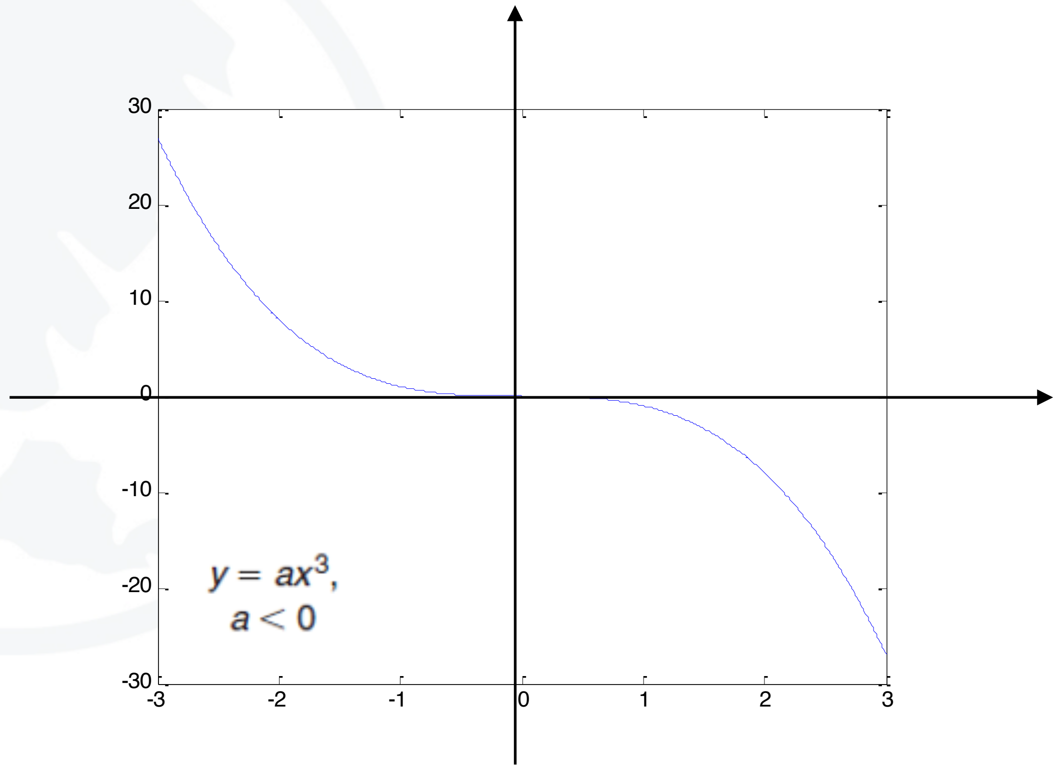
5. Función cúbica

$$f(x) = ax^3$$

$$f : IR \longrightarrow IR$$

Su gráfico





Ejercicios: Determine el dominio y recorrido de las siguientes funciones y bosqueje sus gráficos

1. $f(x) = (x-2)^3 + 4$

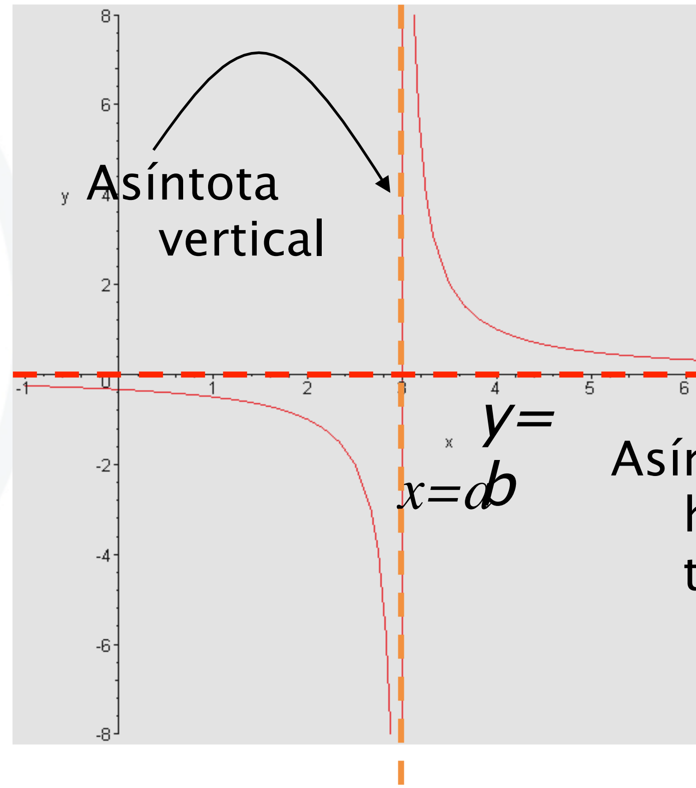
2. $g(x) = 1 - (x+5)^3$

6. Función racional

- Una función racional es el cuociente de dos polinomios

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \qquad con \qquad q(x)\neq 0$$

- Esta función no está definidas en las raíces del denominador: *f(a) no existe si q(x)=0*. En la raíz $x=a$ se producen "**asíntotas verticales**" en la gráfica.
- Este tipo de funciones tiene también "**asíntotas horizontales**", siendo justamente el punto que no está en el recorrido.



Ejercicios: Determine el dominio y recorrido, asíntotas vertica
y horizontal, intersección con los ejes coordenados de las
siguientes funciones y bosqueje sus gráficos.

1. $p(x) = \dfrac{-3}{x-2}$

2. $f(x) = \dfrac{1-x}{5x+2}$

3. $q(x) = \dfrac{7x-2}{4-3x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

5. $t(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$

6. $k(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}$

Operaciones de funciones.

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+g$, f-g, $f \cdot g$ y f/g se definen:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Dominio } \left\{x \in A \cap B / \ g(x) \neq 0\right\}$$

Ejercicios: Calcule $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ y f/g . Determine el dominio en cada caso.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, \quad g(x)=\sqrt{x}$

2. $f(x)=x^2, \quad g(x)=\sqrt{x}$

3. $f(x)=\sqrt{x-1}, \quad g(x)=\dfrac{1}{x+2}$

4. $f(x)=1+\sqrt{x}, \quad g(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$

5. $f(x)=(x+1)^2, \quad g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

Composición de funciones

Otra forma en que dos funciones pueden combinarse y producir una tercera función se conoce como composición de funciones.

Definición: Sean f y g dos funciones. Sea x en el dominio g de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de f. Entonces la función composición fog y(lease f compuesta con g) se define por:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

Ejercicios: Sea

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad y \quad g(x) = \sqrt{x}$$

. Evalúe:

$a.\ (fog)(9)$ $b.\ (fog)(4)$ $c.\ (fog)(x)$

$d.\ (gof)(6)$ $e.\ (gof)(1)$ $f.\ (gof)(x)$

Ejercicios propuestos: Determine $(f o g)(x)$ y $(g o f)(x)$ en los siguientes ejercicios.

1. $f(x) = x^2 + 2, \qquad g(x) = x - 3$
2. $f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = |x|, \qquad g(x) = x^2$
4. $f(x) = x - 1, \qquad g(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = 3x - 1, \qquad g(x) = \dfrac{x+1}{3}$
6. $f(x) = 4, \qquad g(x) = x^2$

Funciones por tramos

xisten situaciones reales que no pueden ser modeladas
on una sola función sino que requieren de varias, es po
sto que existen las funciones por tramos.

jemplo: Pago mensual, en pesos, de un celular según los
minutos utilizados.

$$f(x)=\begin{cases} 14.500 & t\le 200 \\ 14.500+(t-200)\cdot 30 & 200<t\le 400 \\ 20.500+(t-400)\cdot 25 & 400<t\le 600 \end{cases}$$

Determine

Cuánto pagará si usa 125min, 380min y 533min en los
iguientes tres meses?

rcicios:

Dada $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \;\; x\geq 5 \\ 6-3x & si \;\; x<5 \end{cases}$

ermine:

(0), f(7), f(-2) y *f(5)*.

Grafique.

Dominio y recorrido.

Dada

$$g(x)=\begin{cases} 4x+3 & si \;\; -2\leq x<0 \\ 1+x^2 & si \; 0\leq x\leq 2 \\ 7 & si \;\; x>2 \end{cases}$$

ermine:

(1), g(3), g(-1), g(2) y *g(-3)*.

Grafique.

Dominio y recorrido

. Dada $f(x) = \begin{cases} |x+3|-1 & -5 \leq x < -1 \\ x^2 - 2x & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

etermine:

Si existe : $f(0), f(-6), f(-1), f(1)$ y $f(4)$.

. Dominio y ceros de f.

Realice la gráfica de f e identifique su recorrido.

. Dada: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} & , \quad x > -1 \\ -x^2 & , \quad -1 \geq x > -2 \\ -2x-8 & , \quad -2 \geq x \end{cases}$

Determine, si existe, $f(-1)$, $f(0)$, $f(-2)$, $f(-3)$ y $f(12)$.

. Grafique f, indicando raíces, en caso de existir.

Función inversa

Definición: Sea f una función con dominio A y recorrido B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y recorrido A y está definida por:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y}$$

Para cualquier y en B.

Obs: No todas las funciones tienen inversa.

<u>Como reconocer que una función tiene inversa.</u>

Vale la pena observar que una función $f(x)$ tiene una inversa única siempre que cualquier línea horizontal intersecte su gráfica en a lo más un punto. En caso contrario se debe restringir apropiadamente el dominio.

Como hallar la **inversa** de una función:

1. Escriba $y=f(x)$.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x e y, La ecuación resultante es $y= f^{-1}(x)$.

Ejercicio 1: Determine la inversa de las siguientes funciones:

a. $f(x)=2x+1$

b. $g(x)=\dfrac{3x+4}{7x-2}$

Ejercicio 2: Para las funciones dadas restrinja el dominio de modo que la función resultante tenga inversa. Determine la inversa de la función con el dominio restringido. Grafique la función.

a. $f(x) = 4 - x^2$

b. $g(x) = (x-1)^2$

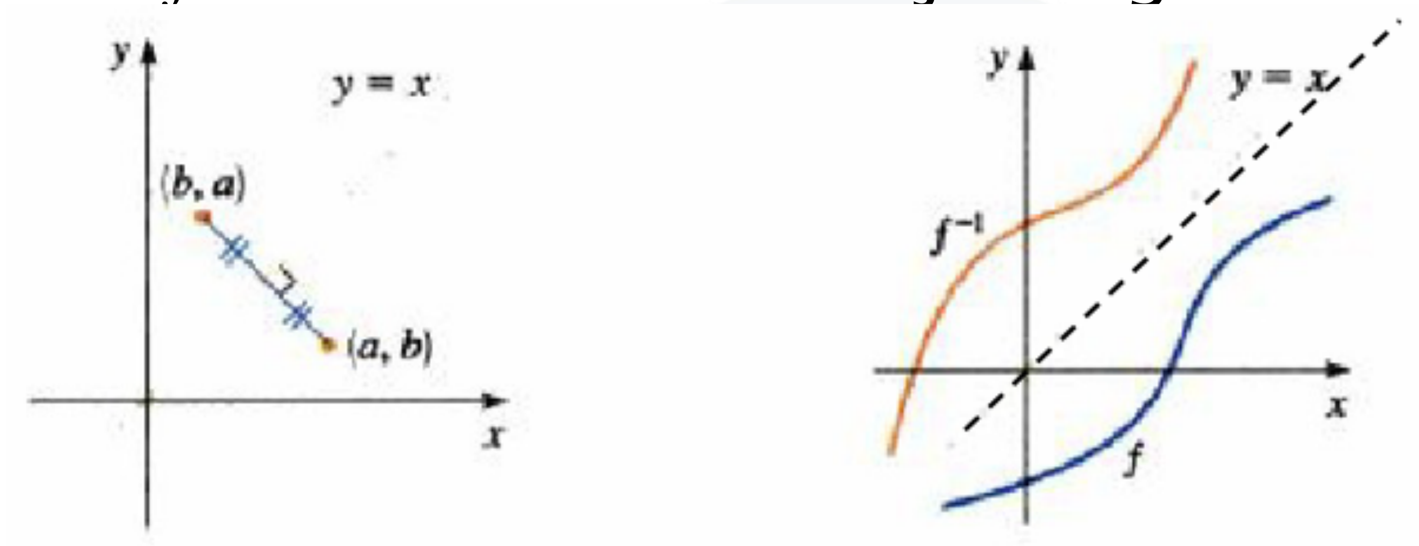
c. $m(x) = (x+2)^2$

d. $u(x) = (x+3)^2 - 4$

e. $v(x) = \left|x-3\right|$

Gráfico de la función inversa

gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta



rcicios: De las siguientes funciones grafique la función y
ersa.

$(x) = x^3$ $b.\ \ g(x) = (x-2)^3$ $c.\ \ m(x) = x^3 - 4$

$(x) = -2x + 3$ $e.\ \ t(x) = \sqrt{x+4}$ $f.\ \ s(x) = (x-1)^2 + 2$

Ejercicios propuestos: Determine la inversa de cada una de las siguientes funciones. En cada caso dibuje la gráfica de la función y su inversa.

1. $f(x) = -3x - 4$
2. $g(x) = 4 - \dfrac{2}{5}x$
3. $m(x) = \sqrt{3x - 4}$
4. $r(x) = \sqrt{4 - x}$
5. $t(x) = -\sqrt{2 - x}$
6. $s(x) = (x + 1)^3 + 2$
7. $u(x) = (x - 3)^2 - 5$

Propiedad de la función inversa

Sea f una función que tiene inversa. La función inversa satisface las siguientes propiedades:

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$$

Ejercicios: Use la propiedad de la función inversa pa mostrar que f y g son inversas entre si.

$f(x) = 2x - 6,\ g(x) = \dfrac{x+6}{2}$

2. $f(x) = 4 - \dfrac{2}{5}x,\quad g(x) = \dfrac{5(4-x)}{2}$

$f(x) = \sqrt{3-x},\ g(x) = 3 - x^2$

4. $f(x) = (x-5)^2,\ g(x) = \sqrt{x} + 5$

$f(x) = \dfrac{4-x}{2x+1},\ g(x) = \dfrac{4-x}{2x+1}$

6. $f(x) = (x-1)^3 + 2,\ g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$

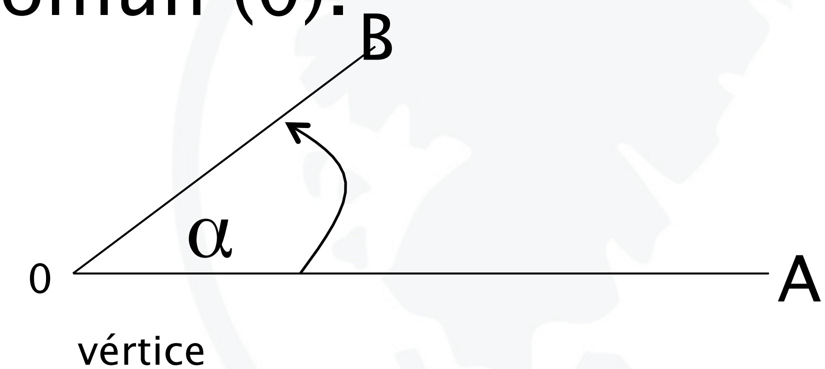
$u(x) = (x-3)^2 - 5,\ g(x) = \sqrt{y+5} + 3$

7. $f(x) = \dfrac{4x+3}{2x-5},\quad g(x) = \dfrac{3+5x}{2x-4}$

rigonometría

Conceptos previos:

Angulo: Está formado por la intersección de dos rayos co
un origen en común (0).



Ángulo A0B=α

Para nombrar los ángulos se usan las letras griegas: $\alpha, \beta, \varphi, \theta, \rho, \ldots etc$

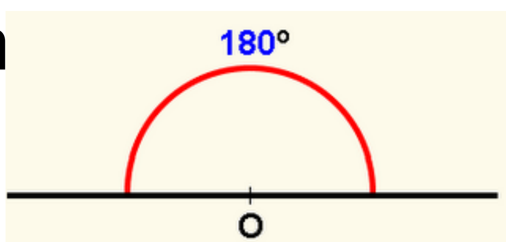
Obs: Los ángulos se miden en forma contraria a l
manecillas del reloj (+).

Sistemas de medida

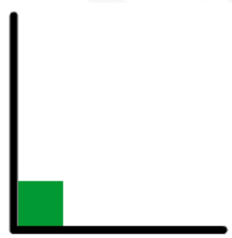
1. <u>Sistema sexagesimal</u>: este sistema divide una circunferencia en 360 partes iguales, su unidad de medida es el grado (°), el cual corresponde a una de las 360 partes. Una circunferencia mide 360°.

2. <u>Sistema circular</u>: La unidad de medida es el radián (rad), el cual se define como la parte de la circunferencia (arco) que es de igual longitud que el radio de ésta. Luego la circunferencia mide 2π radianes.

Án os:

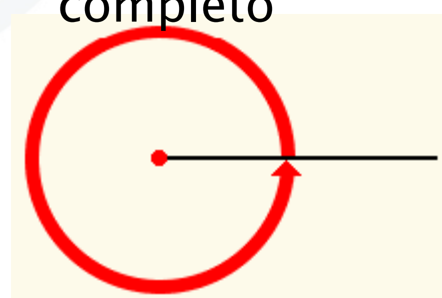


Ángulo extendido



Ángulo recto

Ángulo completo



Transformación de un sistema a otro

Sabiendo que

$$\begin{array}{ccc} \pi & \rightarrow & 180° \\ ang\ \ rad & \rightarrow & ang° \end{array}$$

se resuelve usando regla de tres.

Transforme las unidades al sistema pedido y complete la siguiente tabla.

°	rad
60	
	$\pi/6$
45	
	$\pi/5$
210	

Triángulos

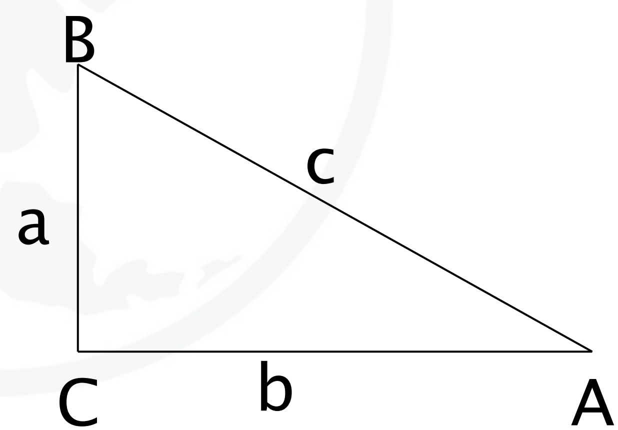
El triángulo es un polígono de tres lados, cuya suma de sus ángulos interiores es 180°.

El triángulo que tiene un ángulo de 90° (ángulo recto) se le llama triángulo rectángulo.

Sea ΔABC rectángulo en C.

donde a y b: catetos

c: hipotenusa

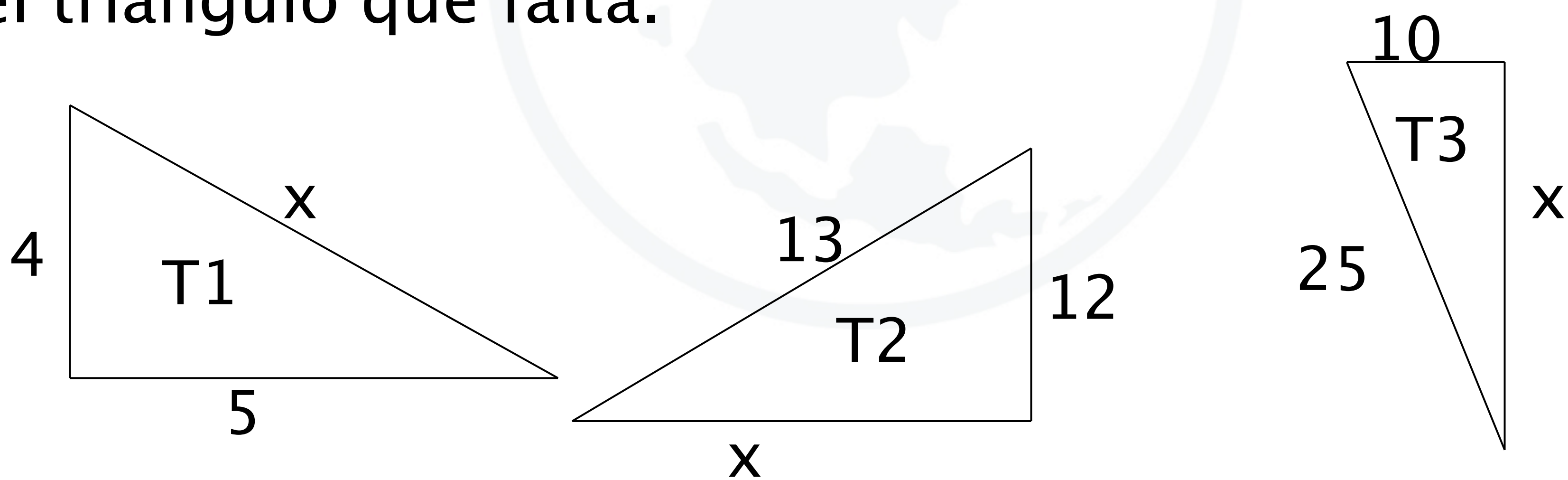


Teorema de Pitágoras

Este teorema relaciona los tres lados de un triángu
rectángulo, por lo que si conocemos dos lados, se pue
calcular el tercero. $a^2 + b^2 = c^2$

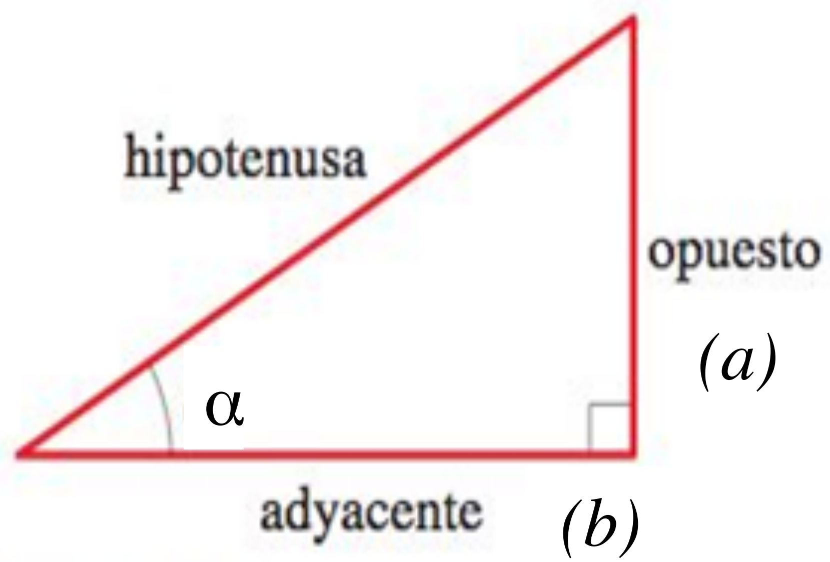
Pitágoras dice:

Ejercicios: Usando el teorema de Pitágoras, determine el la
del triángulo que falta.



Trigonometría triángulo rectángulo

Se tiene un triángulo rectángulo en el cual se pueden establecer relaciones entre los lados del triángulo y sus ángulos interiores. Donde a es el cateto opuesto a α y b el cateto adyacente a α.



$$sen\alpha = \frac{cat\ op}{hip} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{cat\ ady}{hip} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{cat\ op}{cat\ ady} = \frac{a}{b}$$

Valores de las funciones trigonométricas

Complete la siguiente tabla, usando calculadora:

Observación: su calculadora debe estar en radianes.

es/ n étrica	0°	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$	120° $4\pi/6$	150° $5\pi/6$	180° π	210° $7\pi/6$	270° $3\pi/2$	36 2π
α											
α											
α											

Representación Gráfica de Funciones trigonométricas

Sea $f(t)=sen(t)$.

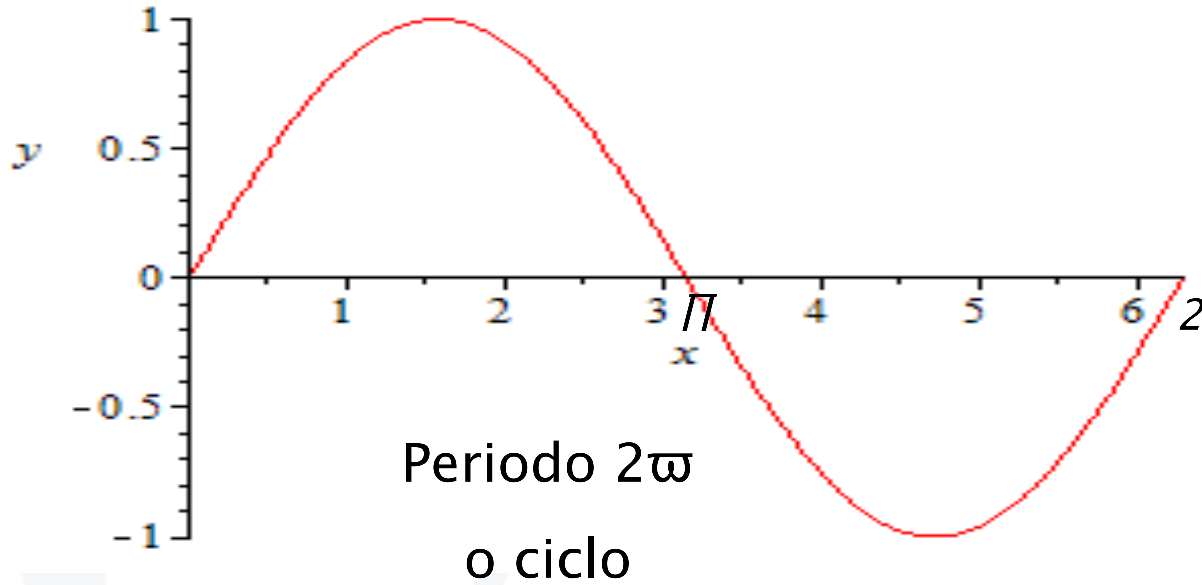
$Domf=IR$

$Recf=$ [-1,1].

Amplitud A=1

Periodo P= 2ϖ

Comenzaremos trazando su gráfica en el intervalo [0, 2 ϖ].



Representación Gráfica de Funciones trigonométricas

Sea $f(t)=cos(t)$.

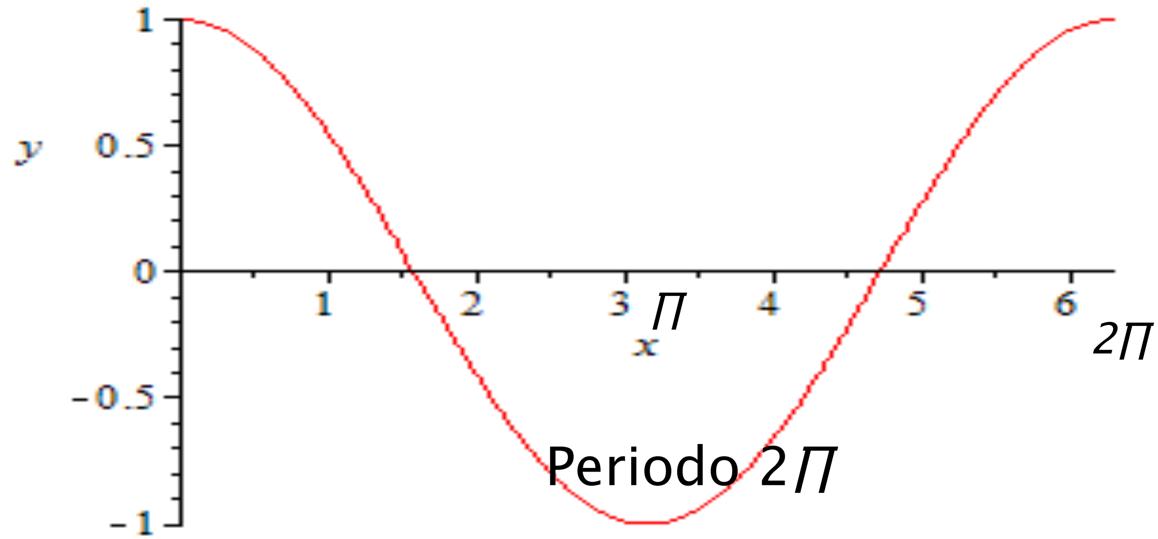
$Domf=IR$

$Recf=$ [-1,1].

Amplitud A=1

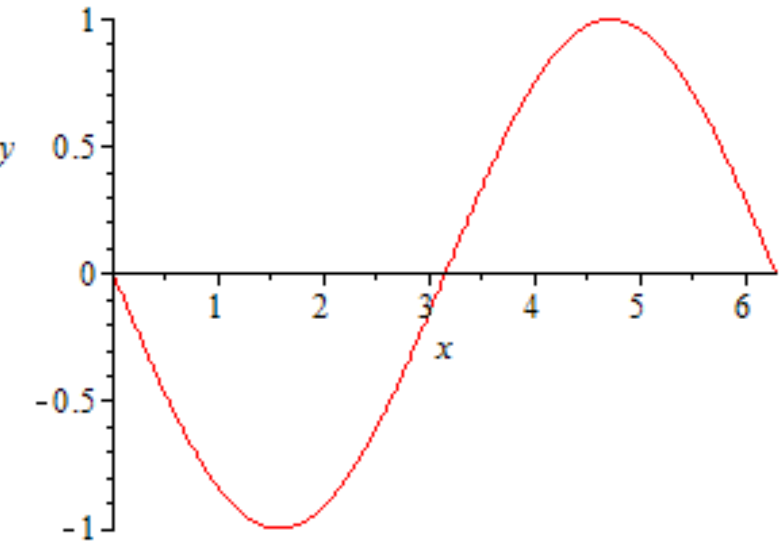
Periodo P= 2ϖ

Comenzaremos trazando su gráfica en el intervalo [0, 2ϖ].

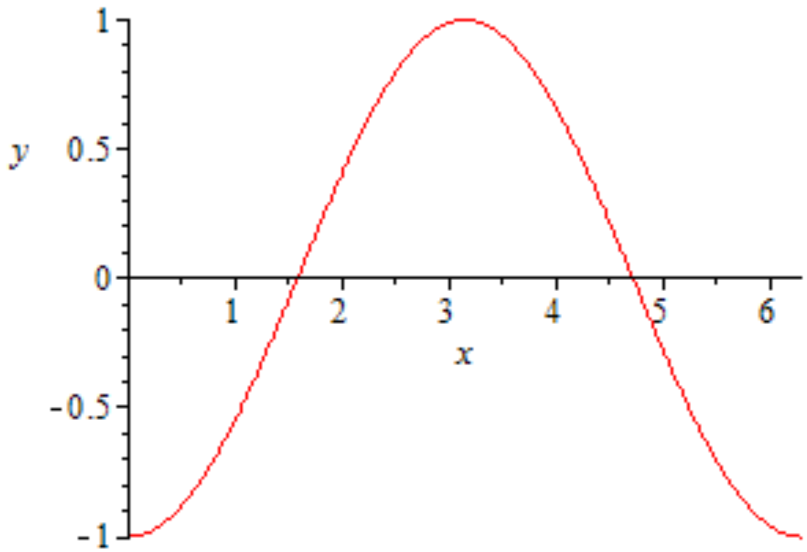


Representación Gráfica de Funciones trigonométricas

$$y = -sen(x)$$



$$y = -\cos(x)$$



Intersecciones de la curva con el eje x

Es importante conocer las intersecciones de la curva con e
eje x, esto quiere decir la solución de la ecuación:

$$f(x) = sen\,x = 0$$

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

múltiplos enteros de π

$$f(x) = \cos x = 0$$

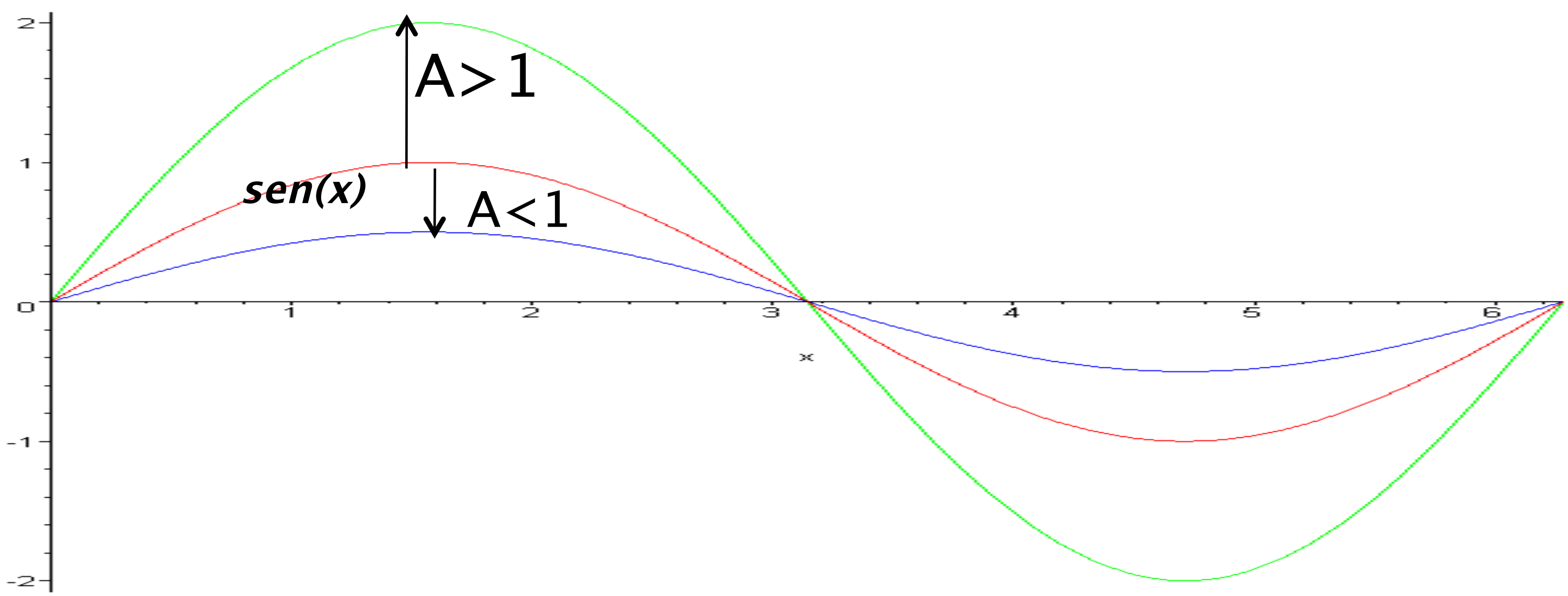
múltiplos enteros impares de $\pi/2$

$$x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$$

Gráficas de $y = A\,sen\,x$ $y = A\cos x$

Para A>0 , las gráficas de esas funciones son un estiramiento vertical (A>1) o una compresión vertical (0<A<1) de las gráficas de

$$y = sen\,x \quad o \quad y = \cos x$$



Al número lAl se le llama **amplitud** de las función. Si A<0 el gráfico se da vuelta.

Ejercicios

Grafique y especifique claramente el valor de la amplitud :

1. $y = 2\,sen\,x$
2. $y = 1/2\;sen\,x$
3. $y = 3\cos x$
4. $y = 0{,}25\cos x$
5. $y = -5\cos x$
6. $y = -4\,senx$

Desplazamiento vertical de las curvas

Si le sumamos D, la función queda:

$y = Asenx + D$ o $y = A\cos x + D$

- Si D>0 la curva sube D unidades.
- Si D<0 la curva baja D unidades.

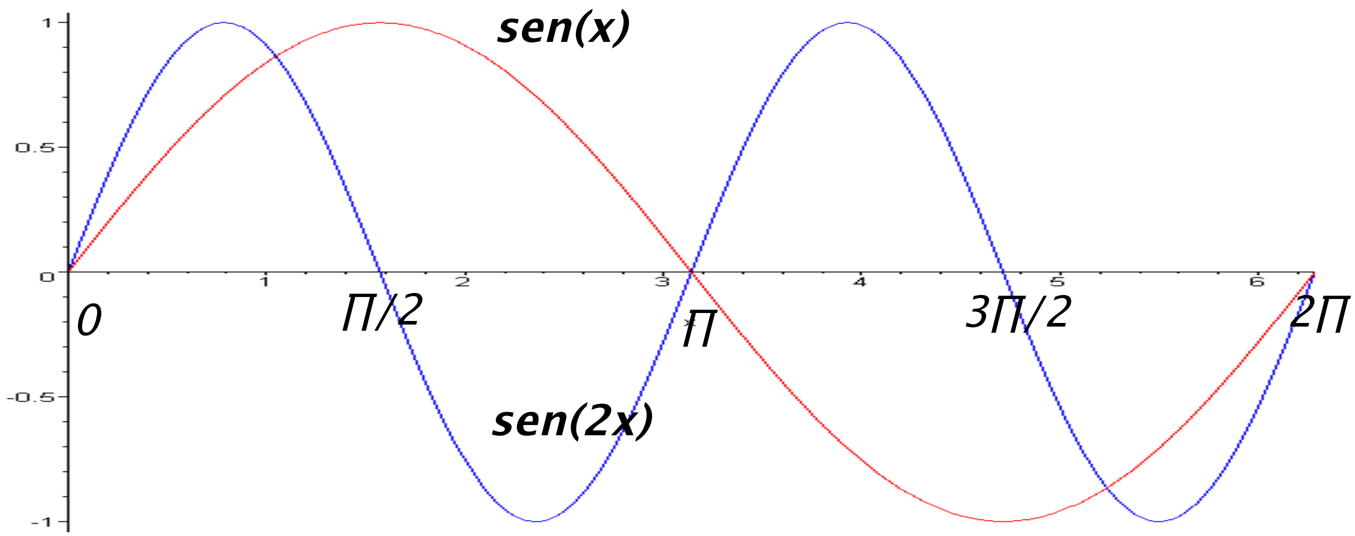
Ejercicios: Grafique las siguientes funciones, especificando la amplitud y el DV..

1. $y = 5 + 2sen\,x$
2. $y = 1/3\cos x - 1$

Gráfica de funciones $y = Asen(Bx)$ $y = A\cos(B$
y

Como el periodo de y=sen(x) es 2**p**, un ciclo de la gráfica
=sen(Bx) comienza en x=0 y se comenzará a repetir sus
alores cuando Bx=2**p** **,** de donde se deduce que el **periodo**
e esta función es P=2**p** /B.

jemplo:



Ejercicios

Grafique , especificando amplitud, desplazamiento vertical y periodo:

1. $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2. $y = sen(\pi x)$

3. $y = -2\cos(3x)$

4. $y = -4 sen\left(\frac{x}{3}\right)$

Gráfica de funciones, desplazamiento horizontal.

$y = A\,sen(Bx + C)$ o $y = A\cos(Bx + C)$

La curva comienza en –C/B

- Si C>0 la curva se desplaza a la izquierda.
- Si C<0 la curva se desplaza a la derecha.

Ejercicios: grafique las siguientes funciones, especificando amplitud, desplazamiento vertical, periodo y desplazamiento horizontal:

1. $y = 3\cos(x + \pi/2)$
2. $y = 2\,sen(x - \pi/3)$

ráfico función $f(x)=10sen(\pi x - 4\pi/3)$

nálisis:

nplitud: A=

riodo: P=

D. V.=

D.H.=

inicia:

termina:

intersección con eje x:

Ejercicios propuestos:

Grafique las siguientes funciones, especificando amplitud, desplazamiento vertical, periodo y desplazamiento horizontal:

a. $f(x) = 1/2 + \cos x$

b. $f(x) = -1 + senx$

c. $f(x) = 3senx + 3$

d. $f(x) = 2 - 4\cos x$

e. $f(x) = sen(\pi x)$

f. $f(x) = 10\cos(x/2)$

g. $f(x) = -5sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

h. $f(x) = -3\cos(2x) + 4$

i. $f(x) = 3sen(5x)$

j. $f(x) = \cos(2x - \pi)$

k. $f(x) = sen(x - \pi/4)$

l. $f(x) = 5\cos(x + \pi) + 2$

m. $f(x) = 6sen(x/3 - 2\pi/3) - 5$

n. $f(x) = 3 - 4\cos(2x - 2\pi/3)$

o. $f(x) = 4 - 2sen(3x + \pi/4)$

Función exponencial Modelos de crecimiento y decrecimiento

Este tipo de funciones son muy útiles en el modelamiento de procesos de crecimiento y decrecimiento en biología, química, economía y ciencias sociales, su forma general es:

$$f(x) = P_0 \cdot a^{kx} \qquad con \qquad a > 0 \qquad a \neq 1$$

P_0 : condición inicial

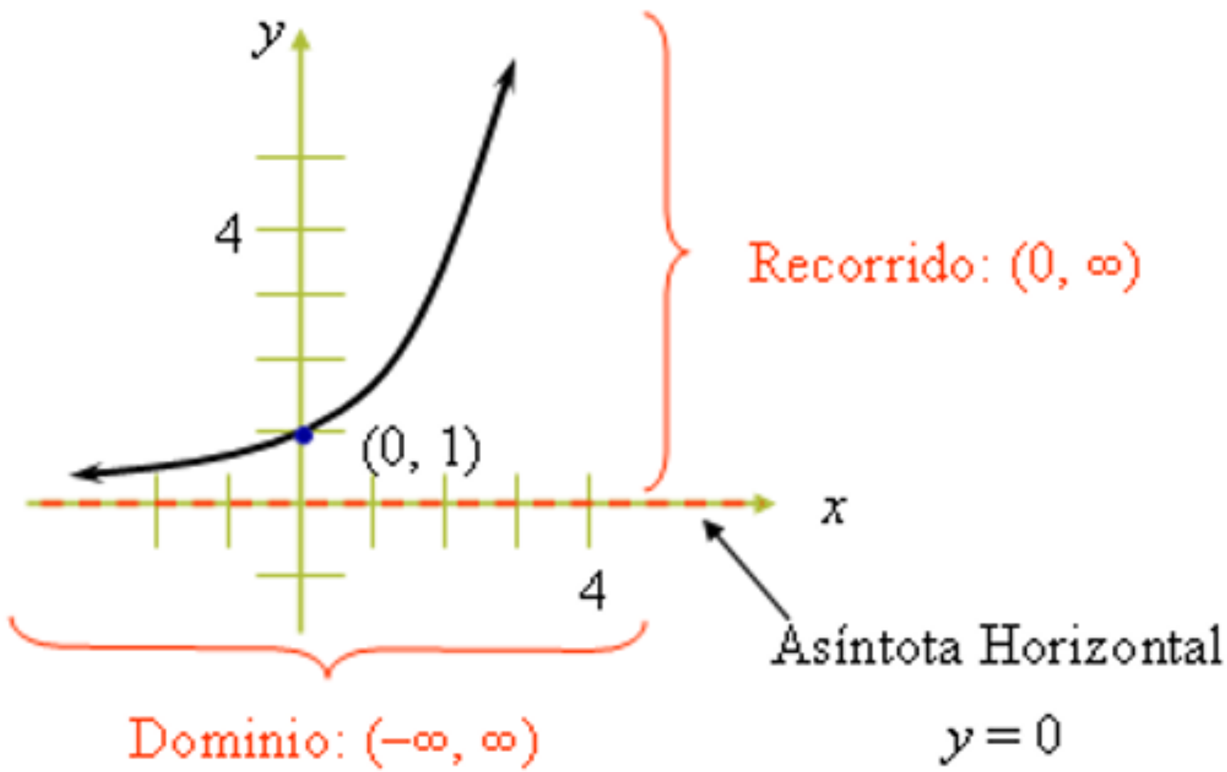
a : base (constante)

k : constante de proporcionalidad

x : variable

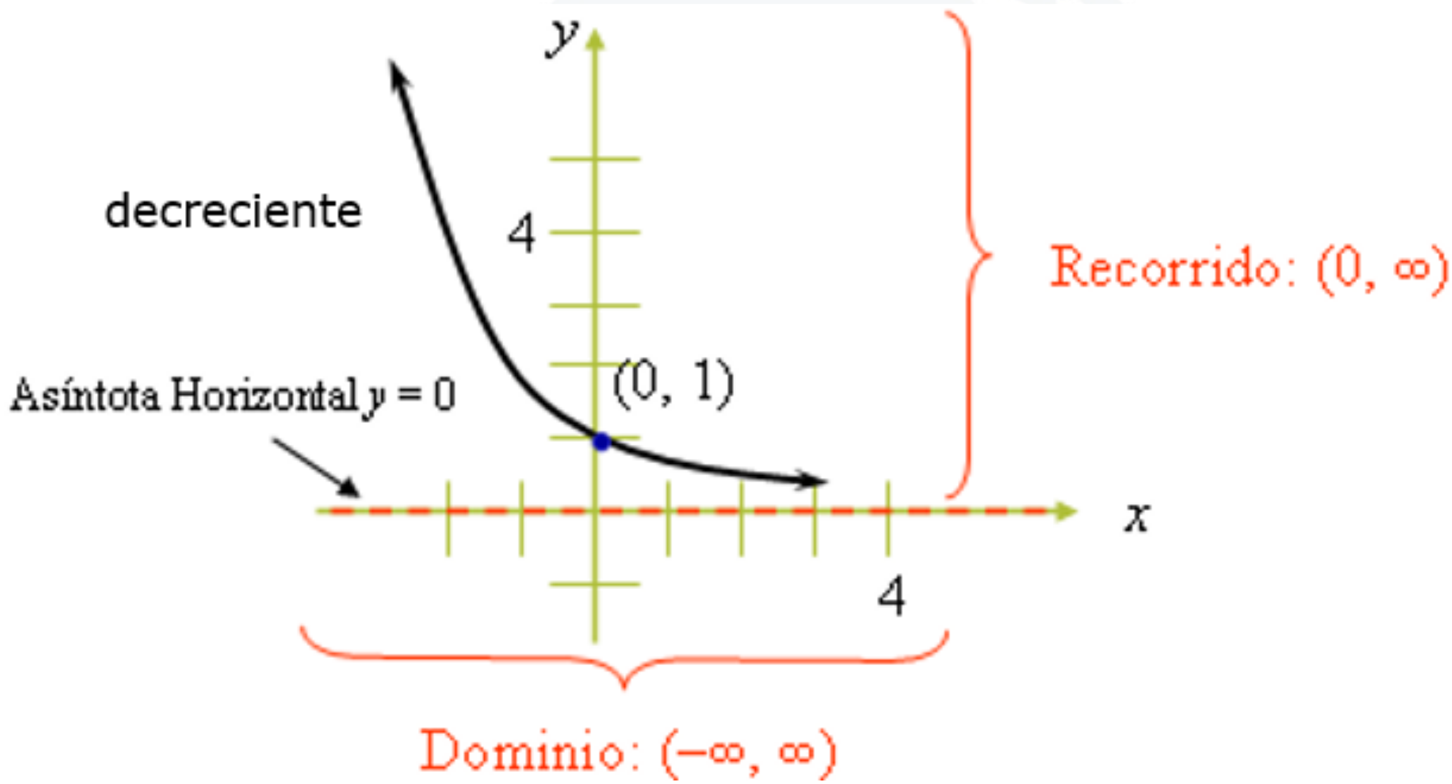
Gráfica de la función exponencial.

$$f(x) = a^x \qquad con \qquad a > 1$$



Gráfica de la función exponencial.

$$f(x) = a^x \qquad con \qquad 0 < a < 1$$



Esboce un gráfico de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 2^x$

2. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

3. $f(x) = 5e^{3,2x}$

4. $f(x) = 6e^{-1,2x}$

5. $f(x) = 5^{x+4}$

6. $f(x) = 4^{x-2}$

7. $f(x) = 6^x + 1$

8. $f(x) = 7^x - 5$

Observación: e=2,7182… número de Euler

Ejercicios: Aplicaciones

1. La población de cierta nación en desarrollo se determinó que está dada por medio de la función:

$$P(t) = 15e^{0,02t}$$

Donde t es el número de años medidos a partir de 1960. Determine la población en 1980 y la población proyectada en 2010, suponiendo que esta fórmula continúa cumpliéndose hasta entonces.

2. La población del planeta al inicio de 1976 era de 4 mil millones y ha crecido un 2% anual. ¿Cuál será la estimación de la población en el año 2030, suponiendo que la tasa de crecimiento no se modifica?

Definición de logaritmo

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x \qquad y > 0$$

Ejercicios: Usando la definición calcule los siguientes logaritmos.

1. $\log_2 32$
2. $\log_4 8$
3. $\log_{27}\left(\frac{1}{9}\right)$
4. $\log_{1/2} 8$
5. $\log_{1/3} 243$
6. $\log_{1/3}\left(\frac{1}{81}\right)$
7. $\log_5 5$
8. $\log_2 1$

Propiedades

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v$
4. $\log_a \left(\dfrac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
5. $\log_a \left(u^n \right) = n \log_a u$

Ejercicios: Si $x = \log_2 3$, exprese las cantidades siguientes en términos de x, usando propiedades.

a. $\log_2\left(\dfrac{1}{3}\right)$

b. $\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)$

c. $\log_2 18$

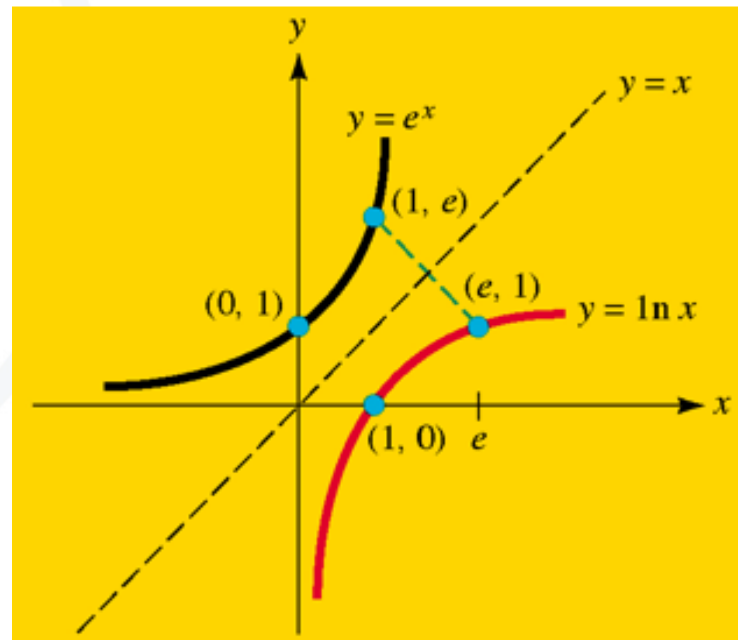
d. $\log_2 \sqrt{\dfrac{27}{2}}$

Logaritmo natural

También podemos formar logaritmos con base e. Estos se denominan logaritmos naturales (o neperianos). Se denotan con el símbolo ln. La definición es:

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \log_e y = \ln y$$

Esto es, la función $x=\ln y$ es la función inversa de la función $y=e^x$.



Ejercicios: usando calculadora, calcule:

a. ln(430) b. ln(43)

Logaritmos comunes

Los logaritmos que por lo común se utilizan para es
propósito son los denominados logaritmos comunes y
obtienen usando el número 10 como base (a=10). Para evit
complicar la notación la base es omitida, es decir:

$$y = 10^{x} \Leftrightarrow x = \log_{10} y = \log y$$

Esto es, la función x=log y es la función inversa de la funció
y=10^{x}.

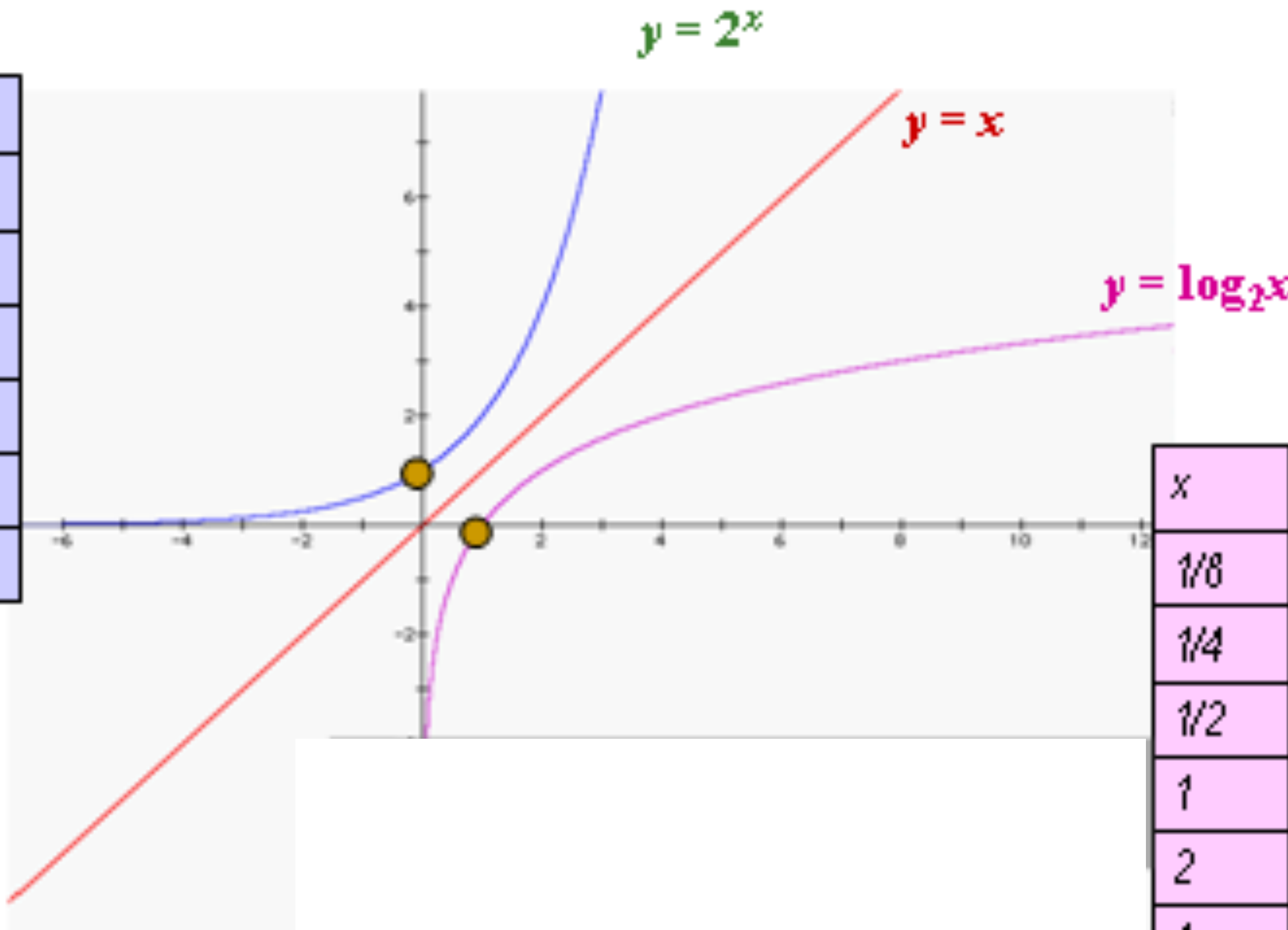
Ejercicios: usando calculadora, calcule:

a. log(1000) b. log(0,01)

c. log(200) d. log(0,43)

Función logaritmo, inversa de la función exponencial

y=2^x
1/8
1/4
1/2
1
2
4



$$\log_a : IR^+ \longrightarrow IR$$

$$x \longrightarrow \log_a($$

x	$y=\log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2

Ejercicios:

1. Determine el dominio de las siguientes funciones

a. $f(x) = \ln(x-2)$

b. $f(x) = \ln(3-x)$

c. $f(x) = \ln(4-x^2)$

d. $f(x) = \ln(9+x^2)$

e. $f(x) = 1 + \ln x$

f. $f(x) = \log|x-3|$

g. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

h. $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$

Ejercicios:

2. Usando la gráfica de y=lnx, haga un bosquejo de las gráficas de las siguientes funciones.

$a.\quad f(x) = \ln(-x)$

$b.\quad f(x) = \ln|x|$

$c.\quad f(x) = 1 + \ln x$

$d.\quad f(x) = -\ln x$

$e.\quad f(x) = 2\ln x$

$f.\quad f(x) = \log x^2$

$g.\quad f(x) = \ln(x-3)$

$h.\quad f(x) = \ln|x+2|$

Ecuaciones

Una de las aplicaciones más importantes de los logaritmos es en la resolución de ciertos tipos de ecuaciones en que la incógnita aparece como un exponente.

Ejercicios: Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando logaritmos y luego la propiedad 5.

$$a. \quad 3^{x} = 16$$

$$b. \quad 4^{2x+1} = 101$$

$$c. \quad 7^{3x-1} = 100$$

Ejercicios: Aplicaciones

1. La función de la demanda para un producto particular es: $f(p) = 200.000e^{-0,15p}$

   Donde $f(p)$ es la demanda (en unidades) y p equivale al precio (en dólares)

a. ¿Cuál se espera que sea la demanda con un precio de 20 dólares?

b. Grafique la función de demanda, indicando la ventana usada para tal gráfico.

c. Determine para que precio la demanda disminuye a la mitad?

2. El volumen de ventas de una marca de detergentes disminuye después de una campaña publicitaria de acuerdo con la fórmula:

$$V(t) = 750 \cdot (1,3)^{-t}$$

donde t es el tiempo en meses.

La siguiente campaña está planeada para cuando el volumen de ventas haya caído a dos tercios de su valor inicial. ¿Cuánto tiempo debe pasar entre dos campañas sucesivas?

3. Una población crece de acuerdo con la función:

$$P(t) = 5 \cdot 10^6 \, e^{0,06\,t}$$

En donde t se da en años. Calcule el porcentaje de crecimiento anual. ¿Cuánto tardará la población en incrementarse en un 50%?

4. Un producto nuevo fue introducido en el mercado en t=0, y a partir de ese momento sus ventas mensuales crecieron de acuerdo a la función:

$$S(t) = 4000 \cdot (1 - e^{-kt})^3$$

Si S=2000 cuando t=10, determine el valor de k.