Guía 13
Función Exponencial y Logarítmica

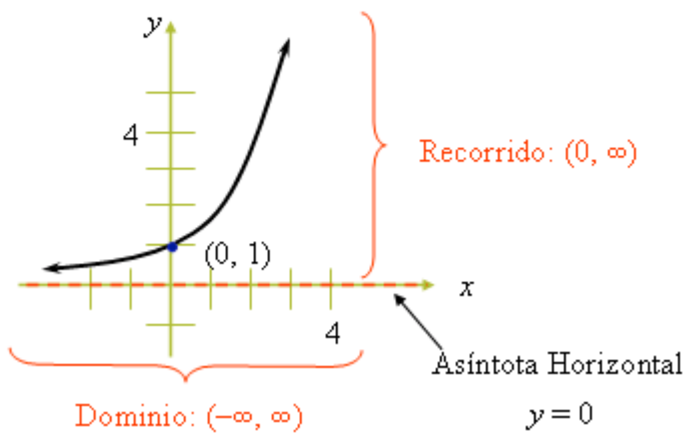
Función exponencial

Si $a>0$, $a \neq 1$, y x es cualquier número real, la función exponencial f con base a está definida como:

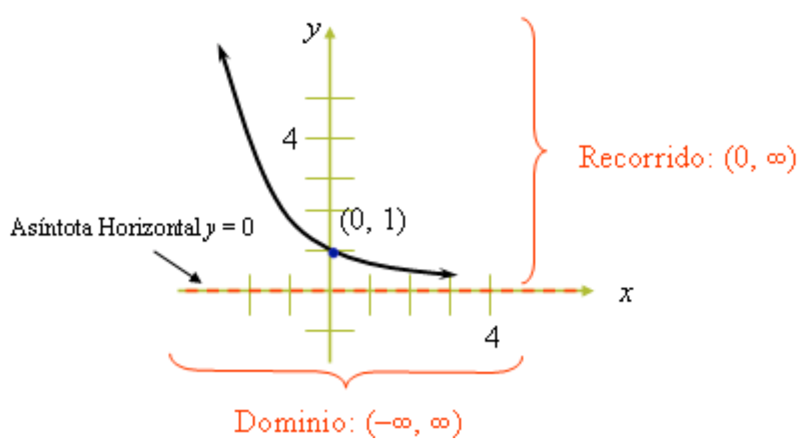
$$f(x) = a^x$$

Observe que la base a se limita sólo a valores positivos. Con esta restricción una expresión como $(-4)^{1/2}$ no es posible.

Gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$, $a > 1$

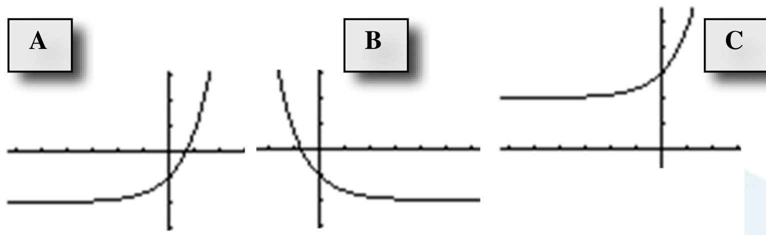


Gráfica de la función exponencial: $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

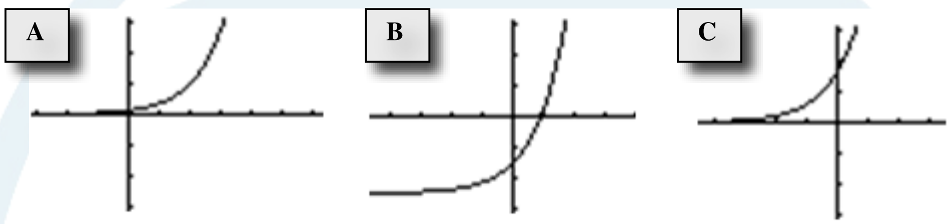


Ejercicios:

1) Identificar la gráfica que corresponde a la función $f(x) = e^x - 2$



2) Identificar la gráfica que corresponde a la función g(x) = $e^{(x-2)}$



3) Una maquinaria se deprecia cada año por el uso, se sabe que el valor V de la maquinaria después de t años desde su compra está dada por:

$$V(t) = 10.000e^{-0,2t}$$

Determine:

a) El valor de compra de la maquinaria.
b) Cuánto costará después de 5 años.
c) ¿Después de cuántos años aproximadamente, la maquinaria costará US$907?

4) Una Isapre calcula que el número de sus afiliados $A(t)$, después de t años está dada por:

$$A(t) = 100.000 \cdot (0{,}04)^{0,5t}$$

a) ¿Cuántos afiliados tiene inicialmente la Isapre?
b) ¿Cuántos afiliados tendrá después de 3 años?
c) ¿Al cabo de cuántos años la Isapre tendrá 32 afiliados?

5) Dada la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

a) Determine dominio, recorrido y puntos de intersección (si existen) de la función
b) Encuentre $f^{-1}(x)$
c) Grafique $f(x)$

6) El decaimiento de las ventas para un producto se obtiene por medio de $S(x) = 50.000e^{-0,1x}$ donde S es la venta semanal (en dólares) y x es el número de semanas que han transcurrido desde que terminó la campaña publicitaria.

Determinar:

a. Las ventas dos meses después de culminar la campaña publicitaria.

b. El número de semanas que deben pasar después de culminar la campaña publicitaría para que las ventas caigan por debajo de los US$15.000.

7) Las Naciones Unidas han pronosticado la población mundial de 1995 a 2150. Usando estas proyecciones se puede modelar la población mundial (en millones) con la ecuación:

$$y = 4155e^{0,0242x}$$

Donde x es el número años transcurridos desde 1990.

a. Suponga que en 1990 la población mundial fue de 4 155 millones de habitantes. Use este modelo para encontrar cuántos años pasaran antes de que se duplique la población de 1990.

b. Según el modelo ¿cuál será la población en el 2008?

8) El valor V de un objeto a los t años de su adquisición se puede modelar con la expresión

$$V(t) = 15.000e^{-0,6286t}, \quad 0 \leq t \leq 10$$

a. Determine el valor del objeto 5 años después de adquirido.

b. Cuánto tiempo debe pasar para que un objeto disminuya su valor en $10000

9) El producto interno bruto (PIB) de cierto país (dado en millones de dólares) de US $ 100 millones en 1980 a US$165 millones dólares en 1990. Suponiendo que el PIB crece exponencialmente ¿Cuál será el PIB en el año 2000?

10) El número total de hamburguesas vendidas (en millones) por una cadena nacional de comidas rápidas crece exponencialmente. Si se vendieron 4000 millones en 1986 y 12000 en 1991. ¿Cuántas se venderán en el 2008?

11) Cierta compañía adquirió hace tres años cierta maquinaria en US$500 000. Su valor actual de reventa es de US$320 000. Si el valor de la maquinaria disminuye en forma exponencial. Encuentre la función que representa la situación y ¿Cuál será el valor de la maquinaria en cuatro años?.

12) Si la población de cierto municipio era de 100.000 habitantes en 1990 y 110.517 en el 2000, y si se aplica la fórmula $y = P_0e^{ht}$ al crecimiento de la población, calcule la población en el 2015.

13) Se estima que el porcentaje de que falle una cierta marca de circuitos de computadora después de t años de uso sea $P(t) = 100(1 - e^{-0,1t})$

Grafique la función y responda lo siguiente

a. Aproximadamente que porcentaje de circuitos que fallaran en 3 años.

b. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que fallen el 60% de los circuitos.

14) Si se invierte p dólares a un de interés compuesto continuamente r, el valor futuro s en un periodo t (en años) está dado por

$$S = pe^{\frac{r}{100}t}$$

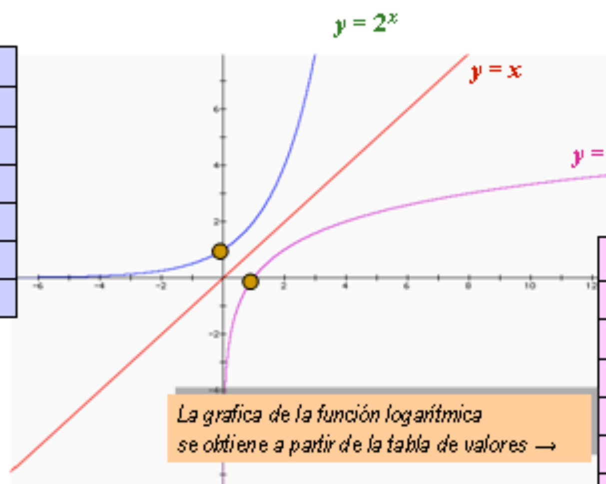
¿En cuánto tiempo se duplica una inversión de $1.000 millones con una tasa de interés del 8,5%?

Función logarítmica

Para x > 0 y 0 < a ≠ 1, y = loga x si y solo si x = a y. La función dada por f (x) = loga x es llamada función logarítmica con base a. Cada ecuación logarítmica tiene una forma exponencial equivalente: y = loga x es equivalente a x = a y
La función logarítmica es la función inversa de la función exponencial.
Función exponencial: y = ax
Función Logarítmica: y = logax es equivalente a x = a y

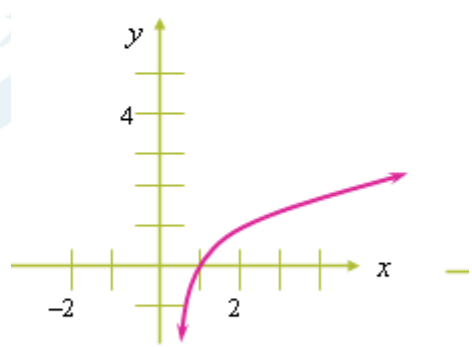
Gráfica de f (x) = log2 x
Puesto que la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial, la base es la misma, su gráfica es una reflexión de la función exponencial sobre la recta y = x.

x	$y=2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4



x	$y=\log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2

$f(x) = \log_b x,\ b > 1$
Creciente



Ejercicios:

1) Considere la función $f(x)=\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Determine:

a) Dominio de la función.
b) f(2) y f(-3/2).

2) Digamos que la función demanda para un producto está dada por $p=\frac{100}{\ln(q+1)}$

a) ¿Cuál será el precio si se demandan 19 unidades?

b) ¿Cuántas unidades serán demandadas si el precio es de 29,4?

3) El ingreso total en dólares por la venta de x unidades de un producto está dado por:

$$R(x)=\frac{2500x}{\ln(10x+10)}$$

Encuentre el ingreso cuando se venden 100 y 200 unidades e interprete el resultado

4) La función demanda de un producto está dada por $p(x)=\frac{4000}{\ln(x+10)}$ donde p es el precio unitario en dólares cuando se demandan x unidades. Encuentre el precio con respecto al número de unidades vendidas cuando se venden 40 y 90 unidades ¿Qué encuentra?

5) Dada la función $f(x)=\log_2\left(\frac{x+4}{2x+1}\right)$. Determine:

a) Dominio y recorrido de la función
b) Intersección con los ejes coordenados, si existen
c) Suponiendo que la función es biyectiva, encuentre su inversa

6) Una compañía encuentra que la cantidad de dólares y que deben gastar semanalmente en publicidad para vender **x** unidades de un producto está dada por:

$$y=200\ln\left(\frac{400}{500-x}\right)$$

a) Calcule el gasto publicitario que se necesita para vender 100, 200 y 300 unidades, compare los resultados que encuentra.
b) Calcule el número de unidades que se deben vender para gastar 100 dólares semanales en publicidad.

7) Suponga que el costo total para un producto está dado por $C(x)=1500+200\ln(2x+1)$, donde x es el número de unidades producidas (en dólares)

a) ¿Cuál será el costo de producir 200 unidades?
b) ¿Cuántas unidades se producirán con 3000 dólares?

8) Suponga que la oferta de x unidades de un producto a un precio p de dólares está dado por:
$P=10+50\ln(3x+1)$

a) Encuentre el precio de oferta cuando el número de unidades es 33.

b) ¿Cuántas unidades se ofrecen a un precio de 300 dólares

9) La función de precio de cierto producto está dada por: $P(q) = \dfrac{50}{\ln(q+1)}$

Donde $P(q)$ representa al precio en dólares y q, a la cantidad demandada (en miles).
Determinar:

a) El precio inicial de venta.
b) ¿Cuántos artículos serán demandados a un precio de US$10
c) Si el precio de venta aumenta a US$12,5, ¿cuál será la cantidad demandada?

10) Dada la función $f(x) = \log_3(3x+27)$

a) Determine dominio, recorrido e intersección con los ejes de la función
b) Asumiendo que la función es biyectiva, encuentre su inversa.