Apunte Docente
Fundamentos Matemáticos
ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Ecuaciones de primer grado
Aplicaciones de ecuaciones de primer grado
Ecuación cuadrática.
Aplicaciones de ecuaciones cuadráticas.
Conjuntos e intervalos.
Desigualdades lineales.
Desigualdades cuadráticas.
Desigualdades fraccionarias.
Valores absolutos.

Verónica Riquelme - Escuela de Ingeniería Comercial - Universidad Finis Terrae

ECUACIONES

Ecuación: Es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas o variables.

Miembro de una ecuación: Se llama a la expresión que está a la izquierda y a la derecha del signo igual.

CLASES DE ECUACIONES

1. **Ecuación de primer grado con coeficientes enteros.** Para resolver este tipo de ecuación primero se debe resolver los paréntesis, si los hay, y luego se debe dejar todos los términos con "x" en un miembro y los sin "x" en el otro.

Ejercicios:

a. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$

b. $x-\left\{5+3x-\left[5x-(6+x)\right]\right\}=-3$

c. $(x-3)^2=(x+4)(x-5)$

CLASES DE ECUACIONES

2. **Ecuación de primer grado con coeficientes fraccionarios.**

   Se multiplica por el mcm de los denominadores y la transformamos en una ecuación con coeficientes enteros.

Ejercicios:

$a.\quad \frac{x}{3}+\frac{x+1}{2}=\frac{1}{6}$

$b.\quad \frac{1}{4}-\frac{x-2}{20}=\frac{2x-3}{5}-\frac{3x-7}{16}$

3. **Ecuaciones de primer grado fraccionarias**.

Lo primero que debemos lograr es convertir las ecuaciones fraccionarias en sus equivalentes enteras y luego resolver la ecuación entera. Para lo cual procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos el M.C.D (mínimo común múltiplo de los denominadores). Si es preciso, se factorizan los denominadores.

2. Multiplicamos cada miembro de la igualdad por el M.C.D

3. Se simplifican cada uno de los términos, obteniendo de esta manera una ecuación entera, y equivalente a la primitiva

Ejercicios:

1. $$\frac{3}{5}+\frac{3}{2x-1}=2$$

2. $$\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}=0$$

Tipos de ecuaciones

4. **Ecuaciones literales**

   En este tipo de ecuaciones, hay que tener claro cual de las letras es la incógnita, resolviéndola con alguno de los métodos anteriores.

Ejercicio:

$$(x+a)(x+b)-x(x+a)=b$$

rcicios propuestos: identifique el tipo ecuación y resuelva

$$(2x+7)(2x-7)-(x-4)^2=(3x-2)(x+5)$$

$$\frac{3x-5}{2}-1-\frac{2x-1}{3}+\frac{x+3}{4}=\frac{5x-1}{8}$$

$$\frac{3x-1}{2x-3}-\frac{x+9}{4x-6}=1$$

$$30x+50(x-6)=-20 \qquad R: 7/2$$

$$(2x+7)(2x-7)-x^2=(3x-2)(x+5) \qquad R: -3$$

6. $$\frac{3x-5}{2}-1=\frac{5x-1}{8}-\frac{x+3}{4} \qquad R: 7/3$$

7. $$3-\frac{2x}{5}=\frac{x-4}{3}-\frac{6x-5}{15} \qquad R: 12$$

8. $$\frac{1}{3x-3}+\frac{1}{4x+4}=\frac{1}{12x-12} \qquad R: 0$$

9. $$\frac{2}{4x-1}=\frac{3}{4x+1} \qquad R: 5/4$$

10. $$x-\frac{x}{a}=b \qquad R: \frac{ab}{a-1}$$

11. $$\frac{2x-7}{3}=5-\frac{3x-2}{4}$$ $R: 94/17$

12. $$1-\frac{2u-3}{4}=\frac{2-5u}{3}-3u$$ $R: -13/50$

13. $$x^2+(x+1)^2=(2x-1)(x+3)$$ $R: 4/3$

14. $$(3x-1)(x+2)+5x=(2x+1)(x-3)+x^2$$ $R: -1/15$

15. $$\frac{5x}{3}-\frac{x-2}{4}=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{2x-1}{3}\right)$$

Ecuación de segundo grado

Una ecuación del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Donde *a, b, c* son constantes, se denomina una ecuación cuadrática en la variable x.

Se puede resolver de tres formas, según si:

- La ecuación está completa o c=0.
- b=0
- Fórmula.

1. Ecuación completa o c=0. (Factorizando)

Propiedad del factor cero:
Si A y B son números reales y AB=0, entonces A=0 o B=0 o ambos son iguales a cero.

Ejercicios:

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$
2. $x^2 + 2x - 3 = 0$
3. $x^2 - 8x = 0$
4. $3(x^2 + 1) = 5(1 - x)$
5. $(2x + 3)(3x - 1) = -4$

2. Ecuación cuando b=0

Propiedad de la raíz cuadrada:

Si $X^2 = A,$ donde $A \geq 0,$ entonces $X = \pm\sqrt{A}$

Ejercicios: Resuelva.

1. $x^2 - 1 = 0$
2. $x^2 - 25 = 0$
3. $4x^2 - 36 = 0$
4. $3x^2 - 48 = 0$

3. Fórmula ecuación cuadrática.

Se tiene la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$

Entonces la solución es

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejercicios: resuelva

1. $2x^2 - x - 2 = 0$
2. $2x^2 + 3x - 4 = 0$
3. $3x^2 + 6x - 2 = 0$
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Aplicaciones de ecuaciones lineales y cuadráticas.

¿Cómo planteo una ecuación?

Paso 1: Represente la cantidad desconocida (es decir, la cantidad que debe determinarse) mediante un símbolo algebraico, tal como x. En algunos problemas, deben determinarse dos o más cantidades; en tales casos, denotamos sólo una de ellas como x.

Paso 2: Exprese todas las demás cantidades, en tales casos, denotamos sólo una de ellas con x.

Paso 3: Traduzca las expresiones verbales que aparezcan en el problema en expresiones algebraicas en las cuales intervenga x. En este contexto, palabras tales como es o era se traducen al símbolo algebraico =.

Paso 4: Resuelva la expresión o expresiones algebraicas de acuerdo con los métodos algebraicos.

Paso 5: Transforme la solución algebraica en forma verbal.

Ejercicios de Aplicaciones de ecuaciones lineales. Plantee, resuelva y responda.

1. Una vendedora gana un salario base de \$180.000 por mes más una comisión de un 10% de las ventas que haga. La vendedora descubre que en promedio, le toma 6 horas realizar ventas por un valor de \$720.000. ¿Cuántas horas deberá trabajar en promedio cada mes para que sus ingresos sean de \$600.000?

2. La señora Cordero va a invertir \$50.000.000. Puede invertir sus fondos en depósitos a plazo a un 5% y fondos mutuos al 8,5%. ¿cómo debería invertir su dinero de tal manera que obtenga \$3.500.000 de interés?

jercicios propuestos: Plantee, resuelva y esponda

Un hombre invierte al 8% el doble de la cantidad qu destina al 5%. Su ingreso total anual por las dos inversione es de $588.000. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

Un colegio destina $42.000.000 a un fondo a fin de obtene un interés anual de $3.500.000 para becas. Una parte nvertirá en fondos mutuos a un 8% y el resto en depósito a largo plazo a un 10,5%. ¿Cuánto deberá invertir en cad opción con objeto de obtener el interés requerido?

Los miembros de una fundación desean invertir 12600000 en dos tipos de seguros que pagan dividendo anuales del 9 y 6% respectivamente. ¿Cuánto deberá nvertir a cada tasa si los intereses deben ser equivalente al que produciría al 8% la inversión total?

A un fabricante le cuesta $1400000 comprar herramientas para la fabricación de cierto artículo casero. Si el costo para material y mano de obra es de $420 por artículo producido, y si el fabricante puede vender cada artículo en $630. Determine cuántos artículos debe producir y vender para obtener una utilidad de $700.000.

El costo de publicar cada copia de una revista semanal es de $196. El ingreso de las ventas al distribuidor es de $168 por copia y de los anuncios es del 20% del ingreso obtenido de las ventas por sobre 3000 copias. ¿Cuántas copias deben publicarse y venderse cada semana para generar una utilidad semanal de $700.000?

Un vendedor de autos usados compró dos automóviles por $2.060.000 Vendió uno con una ganancia de un 10% y otro con una pérdida de un 5%, y aún obtuvo una ganancia de $129.500 en la transacción completa.

plicaciones ecuaciones cuadráticas. En los guientes ejercicios plantee, resuelva y sponda.

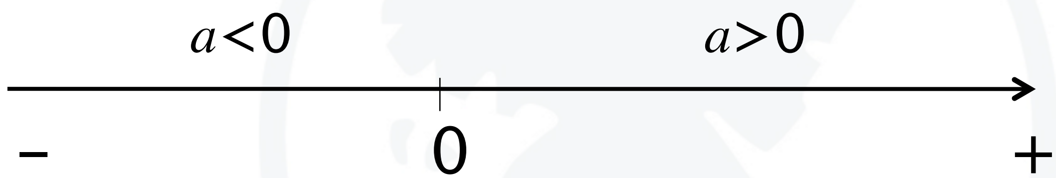
Steve es propietario de un edificio de apartamentos que tien 60 departamentos. Él puede arrendar todos los departamento si cobra una renta de $126.000 mensuales. A una renta mayor algunos de los departamentos permanecerán vacíos; e promedio, por cada incremento de $3500 en la renta, departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo Encuentre la renta que debe cobrar por cada departament para obtener un ingreso total de $8.032.500?

La cámara de comercio Británica sabe por experiencias pasada que si cobra "p" euros por docena de huevos, el númer vendidos por semana será "x" millones de docenas, dond *p=2-x*. Si el costo de producir x millones de docenas d huevos por semana está dado por *C=0,25+0,5x* millones d euros. ¿a qué precio debe vender los huevos la industria par asegurar una utilidad de 0,25 millones de euros.

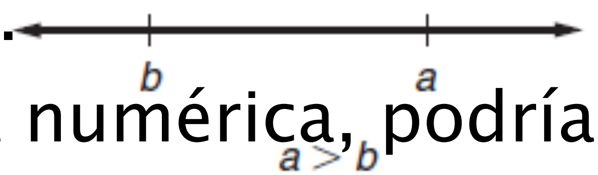
Desigualdades.
Conjuntos e intervalos

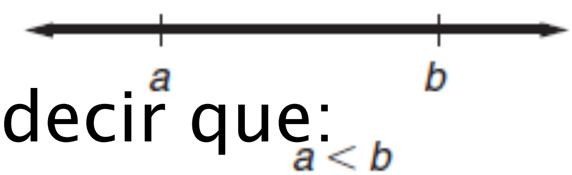
pecemos recordando los símbo $<, \le, >$ y $\ge$, denominados símbo
desigualdad.

 números reales se dividen en dos clases, números positivo
gativos.



posiciones tales como $a < b, a > b, a \ge b$ o $a \le b$ se llaman desigualdades.
ticular, a>b y a<b son desigualdades estrictas. La desiguald
o puede escribirse en forma equivalente en la dirección opue
no b>a.





la recta numérica, podríamos decir que:

njunto

finición: un conjunto es toda colección de objetos bien defini
decir, podemos sin ambigüedad alguna saber si pertenece o n
olección.

servaciones:

conjunto que no tienen ningún elemento se denomina **conju**
acío.

e dice que un conjunto es finito si su número de elementos
nito; es decir, si pueden contarse los elementos. Si el número
ementos de un conjunto no es finito, se dice que el **conjunto**
finito.

$]a, b[$

ervalo

finición: sean a y b dos números reales tales que $a < b$, entonce

ervalo abierto de *a* a *b*, denotado por , es el conjunto
os los números reales x situados entre a y b. Así,

$b[= \{x / \ x$ es un número real y $a < x < b\}$

la misma forma, el intervalo cerrado de *a* a *b*, denotado por $[a,b]$
conjunto de todos los números reales situados entre *a* y *b* p
también incluye a éstos. Por tanto,

$$[a,b]=\{x/\ x \text{ es un número real y } a \le x \le b\}$$

os Intervalos **semicerrados o semiabiertos**, se definen de
uiente manera:

$$]a,b]=\{x/\ x \text{ es un número real y } a < x \le b\}$$

$$[a,b[\,=\{x/\ x \text{ es un número real y } a \le x < b\}$$

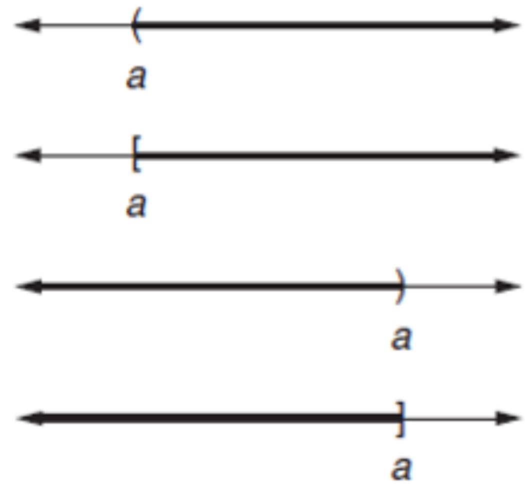
amos los símbolos ∞ (infinito) y $-\infty$ (menos infinito) para descr
<u>ervalos no acotados</u>. Obsérvese que ∞ y $-\infty$ no son núme
les.

a. $\left]a,\infty\right[= \{x/\ x > a\}$

b. $\left[a,\infty\right[= \{x/\ x \geq a\}$

c. $\left]-\infty, a\right[= \{x/\ x < a\}$

d. $\left]-\infty, a\right] = \{x/\ x \leq a\}$



Desigualdades lineales

efinición: La solución de una desigualdad en una variable es
njunto de todos los valores de la variable, para los cuales
sigualdad se cumple.

gla 1:

ando el mismo número real se suma o se resta a ambos lados
a desigualdad, el sentido de la desigualdad no se altera.

gla 2:

sentido de la desigualdad se preserva si ambos lados
ltiplican (o dividen) por el mismo número positivo y se invier
ando se multiplica (o dividen) por el mismo número negativo.

emplo: Encuentre todos los números reales que satisfacen $3x + 7 > 5x - 1$
sigualdad

Ejercicios

suelva las siguientes desigualdades:

$$y+\frac{3}{4}\leq\frac{5y-2}{3}+1$$

$$8-3x\leq 2x-7< x-13$$

$$7>5-2x\geq 3$$

$$(x+3)^2>(x-2)^2$$

$$(2x+3)(3x-1)\leq(6x+1)(x-2)$$

Ejercicios Aplicación

Plantee, resuelva y responda:

1. El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produc precio de $42.000 cada artículo. Gasta $28.000 en materia prim mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicion (fijos) de $2.100.000 a la semana en la operación de la pl Encuentre el número de unidades que debería producir y vender obtener una utilidad de al menos $700.000 a ala semana.
2. El administrador de una fábrica debe decidir si deberán produci propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo proveedores externos a $770 cada uno. La fabricación de empaques incrementaría los costos generales de la empresa $560.000 al mes y el costo de material y de mano de obra será $ por cada empaque. ¿ cuantos empaques deberá usar la empres mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques?
3. La señora K tiene $3500000 que quiere intervenir, parte a 6% resto a 8%. Si ella desea un ingreso anual por intereses de al m $24.900, ¿Cuál es la cantidad mínima que debe invertir al 8%?

Desigualdades cuadráticas

a desigualdad cuadrática de una variable, tal como x, es u
sigualdad que tiene términos proporcionales a x y a x^2
minos constantes. Las formas estándares de una desiguald
adrática son:

$$x^2 + bx + c > 0 \ (o \ bien \ < 0) \qquad o \qquad ax^2 + bx + c \geq 0 \ (o \ bien \ \leq 0)$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes determinadas ($a \neq 0$).

ra resolver una desigualdad cuadrática, esto es, en determinar
njunto x para el cual la desigualdad se cumple.

ra resolver $x^2 + 3x - 4 < 0$ se puede hacer esto:

Reemplazando la desigualdad con un signo = , se deb
encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática resultante.

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0 \qquad x = -4, x = 1$$

Las soluciones dividen a la recta numérica en intervalos. cada intervalo seleccionamos un punto y probamos si desigualdad es cierta o falsa en ese punto. Si es verdadera ese punto, entonces será verdadera en todos los puntos intervalo, y recíprocamente, si es falsa.

$-\infty \quad -4 \quad 1 \quad \infty$

	-5	0	2
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
x^2+3x-4	$+$	$-$	$+$

Por lo que la solución es

$$S: x \in \left]-4,1\right[$$

ercicios: Resuelva las siguientes desigualdades adráticas.

$$5x \leq 2(x^2 - 6)$$

$$x^2 - 6x + 6 \leq 0$$

$$x^2 + 2 > 2x$$

licación: plantee, resuelva y responda.

Las ventas mensuales x de cierto artículo cuando su precio dólares están dadas por $p=200-3x$. El costo de producir x unidad mes del artículo es $C=(650+5x)$ dólares. ¿Cuántas unidades te artículo deberán producirse y venderse de modo que lidad mensual sea por lo menos de 2200 dólares?

esigualdades racionales

s desigualdades racionales se resuelven de la misma forma que l
sigualdades cuadráticas, con la diferencia de que tenemos q
cular los puntos críticos del numerador y denominador(una vez que
cción es <,> que 0), los últimos puntos críticos no pueden pertenec
a solución.

servación: NUNCA se debe multiplicar cruzado.

rcicios: Resuelva las siguientes desigualdades racionales.

$$\frac{x-3}{x+1} \leq 0$$

2. $$\frac{3+x}{3-x} \geq 1$$

$$\frac{4}{x} < x$$

4. $$1+\frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x}$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} \geq 1$$

6. $$\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$$

Valor absoluto

x es un número real, entonces el valor absoluto de x , denotad
r lxl, se define por:

$$|x| = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

opiedades:

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2. $|a| \geq 0$

$|-a| = |a|$

4. $|a-b| = |b-a|$

5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ propiedad multiplicativa

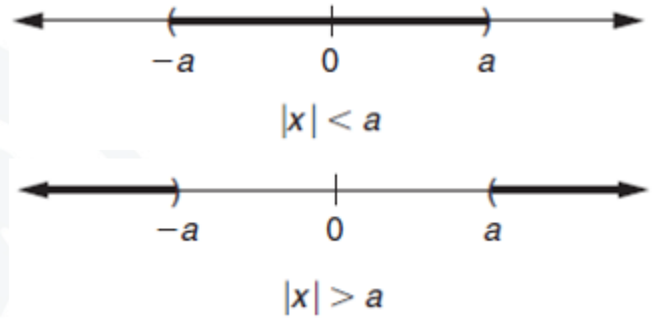
$|a^n| = |a|^n,$ para n entero positivo o cero

Teoremas:

$Si\ a > 0$, entonces:

$|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$

$|x| > a$ si y sólo si $x > a$ o $x < -a$



Ejercicios: resuelva las siguientes desigualdades expresando la solución como un intervalo.

1. $|2x-3| < 5$
2. $|2-3x| > 7$
3. $|5x-6| + 3 \leq 0$
4. $|3x-5| \leq x+1$