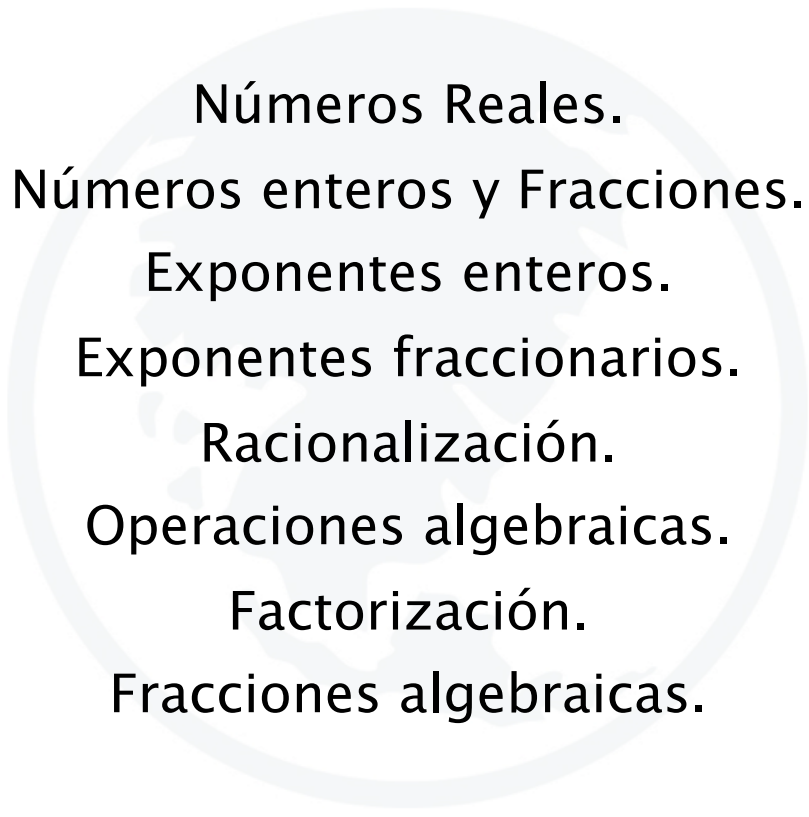


Apunte Docente

Fundamentos Matemáticos



Números Reales.
Números enteros y Fracciones.
Exponentes enteros.
Exponentes fraccionarios.
Racionalización.
Operaciones algebraicas.
Factorización.
Fracciones algebraicas.

Subconjuntos notables de los números reales (IR)

El conjunto de los
Números Naturales

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

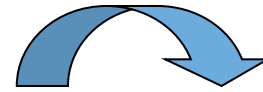
El conjunto de los
Números
Cardinales

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

El conjunto de los
Números Enteros

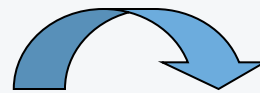
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El conjunto de los
Números Racionales

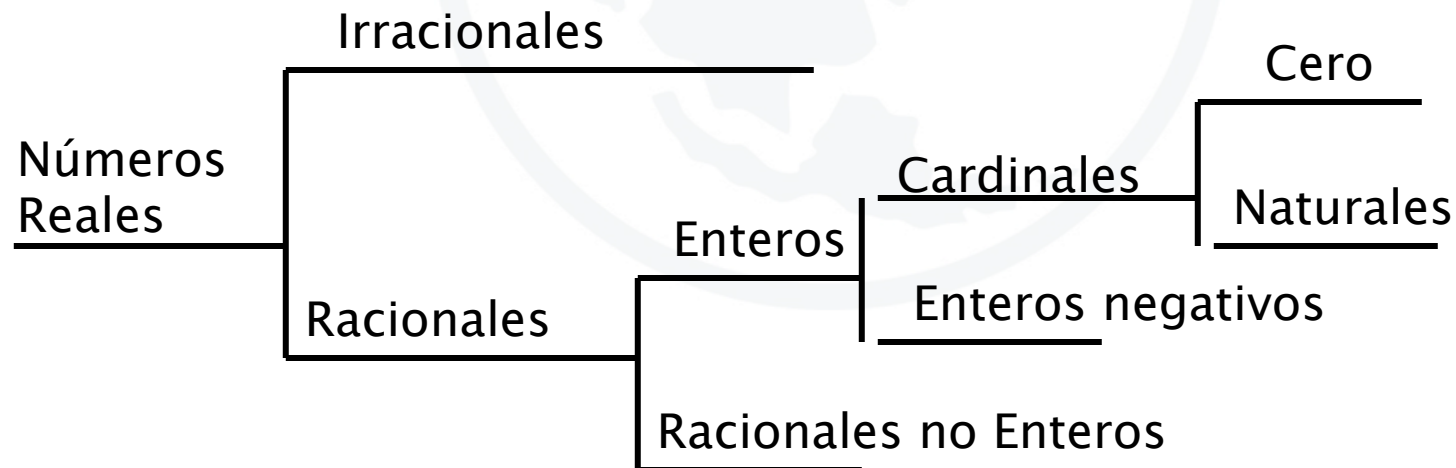


$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

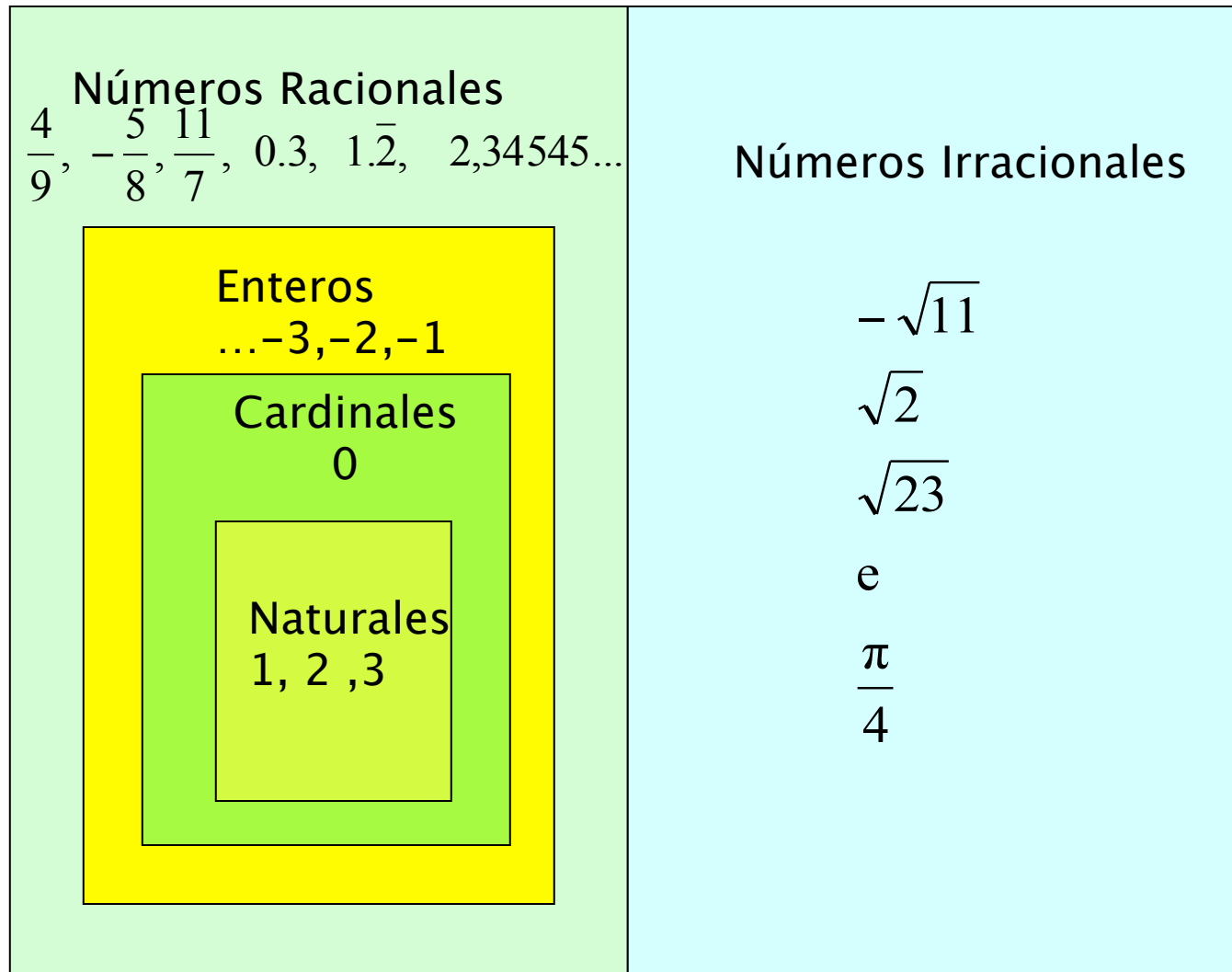
El conjunto de los
Números
Irracionales



$$I = \mathbb{R} - Q$$

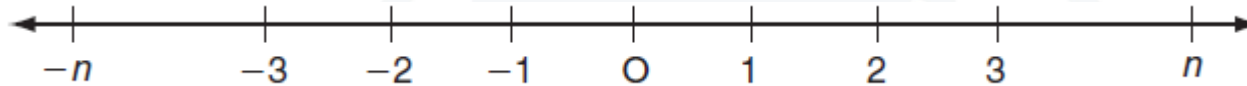


Conjunto de Números Reales



Representación gráfica.

Recta numérica



El punto 0 sobre la recta numérica, representa el cero.
También separa los números positivos (a la derecha) de los negativos (a la izquierda).

Axiomas de \mathbb{R} como Cuerpo

Definiremos la existencia de un conjunto \mathbb{R} cuyos elementos se llaman números reales. En el conjunto \mathbb{R} se tienen las operaciones fundamentales:

La suma o adición: $(a+b) \in \mathbb{R} \quad a \text{ y } b \in \mathbb{R}$

La suma de dos números enteros de igual signo, se suman y se conserva el signo.

Ejemplo: $-7 + -8 = -15$

La suma de dos números enteros de distinto signo, se restan y se conserva el signo del mayor.

Ejemplos:

$$-10 + 4 = -6$$

$$-3 + 11 = 8$$

Axiomas de IR como Cuerpo

El producto o multiplicación: $(a \cdot b) \in \mathbb{R}$ a y $b \in \mathbb{R}$
se efectúa multiplicando los números y el signo queda definido según la siguiente regla:

$$\begin{array}{ll} + \cdot + = + & - \cdot - = + \\ + \cdot - = - & - \cdot + = - \end{array}$$

Ejemplos:

$$3 \cdot 9 = 45$$

$$3 \cdot (-12) = -36$$

$$(-3) \cdot (-5) = 15$$

$$(-8) \cdot 10 = -80$$

Propiedades de IR

Para la suma

Asociatividad Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c=a+(b+c)$

Ejemplo: $(-4+1)+5 = -4 + (1+5) = -4 + 6 = 2$

Existencia de neutro Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$
 $0+a=a+0=a$

Existencia de inverso Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $(-a) \in \mathbb{R}$ tal que
 $a+(-a)=(-a)+a=0$

Conmutatividad Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ $a+b=b+a$

Ejemplo:
 $(1 + -4) + 5 = (-4 + 1) + 5 = -4 + 6 = 2$

Conm.

Asoc.

Ejercicios: Calcule usando propiedades.

1. $-2 + 5 + (-4) + 3 + 10 + (-8) + 6$

2. $[-8 + (-3 + 20) + 5 + (3 - 7) + (-6 + 4) - 3]$

3. $5 - 3 + (-8 + 9 - 3) + (-2 - 2 + 1)$

4. $22 + (-7 + 9 - 1) + 1 + 6 - 15$

Para la multiplicación:

Commutatividad Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ $a \cdot b = b \cdot a$

Asociatividad Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Ejemplo: $2 \cdot (5 \cdot 7) = 2 \cdot 35 = 70$
 $= (2 \cdot 5) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$
 $= (2 \cdot 7) \cdot 5 = 14 \cdot 5 = 70$

Existencia de neutro Existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ $1 \cdot a = a$

Existencia de inverso Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

Distributividad Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo: El conjunto \mathbb{R} provisto de todos los axiomas dados anteriormente se dice que es un **Cuerpo Conmutativo** y se escribe $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo

Números Reales (IR)

Proposición:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$i) \quad -(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$ii) \quad -(-a) = a$$

$$iii) \quad (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$$

$$iv) \quad (a^{-1})^{-1} = a \quad a \neq 0$$

$$v) \quad b \cdot 0 = 0$$

$$vi) \quad -(ab) = (-a)b = a(-b)$$

$$vii) \quad (-a)(-b) = ab$$

Ejercicios: Resolver usando propiedades.

1. $3 \cdot (-2 \cdot -4)$

2. $3 - 2 \cdot (-4)$

3. $-\{3 - [5 - 4(-1 - 2)]\}$

4. $(-2 - 1 \cdot 7)(-3 + 3 \cdot 6)(4 - 5)$

5. $7 - 2 \cdot 3 + 8 : 4 - 4 + 9 : (-3) - 5 \cdot 0 + 1$

6. $-4 - \{1 - 2 \cdot [16 : 4 - 4 \cdot (12 : -4) - 10 \cdot 0] - 7\}$

Ejercicios propuestos: Calcule usando propiedades.

7. $-2 \cdot [-5 - (4 - 1) \cdot (-3) + 1 - (2 - 3) \cdot (-3 - 1)]$

8. $-[-(-3 + 20) + 5 \cdot (3 - 7) - (-6 + 4) \cdot 3]$

9. $5 - 3\{-[-(-8 - 3) + (-2 - 2)] - 1 + 5\}$

10. $22 - \{-(-[-(-7 - 1) + 1] + 6)\}$

Números Racionales

Proposición:

Sea $a, b, d \in \mathbb{R} - \{0\}, c \in \mathbb{R}$ entonces:

<i>Inverso multiplicativo</i>	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$	
<i>Suma y resta</i>	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	
<i>Multiplicación</i>	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	<i>División</i> $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Ejercicios:

1) $\frac{4}{5} - \left(\frac{10}{7}\right)^{-1}$

2) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{6}$

3) $\frac{18}{11} : \frac{8}{33}$

4) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{10}{7}$

5) $\left(\frac{1}{9} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{1}{3}\right)$

6) $8 : \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)$

Problemas de planteo números enteros

1. Augusto emperador romano, nació en el año 63 a.C. y murió en el 14 d.C. ¿Cuántos años vivió?
2. Rodolfo tiene \$30.000 en efectivo, gasta \$4.500 el fin de semana, luego saca de su cuenta corriente \$60.000 y compra sus útiles a usar en la Universidad por \$55.000. ¿Cuánto dinero en efectivo le queda a Rodolfo?
3. En un juego de cartas un jugador A obtiene 34 puntos a favor y 16 puntos en contra. Un jugador B obtiene 44 puntos a favor y 20 en contra.
 - a. Si el ganador se determina por la mayor diferencia entre los puntos a favor y en contra. ¿Quién ganó?
 - b. Si el premio son 400 dólares por punto de diferencia ¿Cuál es el premio que recibió el ganador?

Problemas de planteo números racionales

1. Si tengo \$55.000 y hago compras por los $\frac{6}{5}$ de esta cantidad. ¿Cuánto debo?
2. Un chef tiene en un recipiente 8 tazas de leche. Utilizó $2\frac{2}{3}$ tazas para hacer muffins y $3\frac{1}{4}$ para hacer un flan. ¿Cuántas tazas de leche le quedaron?
3. Una persona está a dieta para aumentar de peso. El primer mes subió 0,75Kg, el segundo mes bajo $\frac{1}{2}$ Kg, el tercer mes aumento $1\frac{3}{4}$ Kg y el cuarto mes bajó $\frac{2}{3}$ de Kilo. ¿Cuántos kilos subió?
4. En las vacaciones tenía 86 dólares. Compré 3 libros de $1\frac{1}{8}$ dólar cada uno, seis objetos de $\frac{7}{8}$ de dólar y cinco revistas por 8,5 dólares. ¿Cuánto me quedó?

Potencias enteras

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Se define la potencia real de base a y exponente n por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}$$

Observación:

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

Ejercicios: calcule. $5^3 =$

$$2^4 =$$

$$1052^0 =$$

Teorema:

Sea $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ entonces

$$i) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$ii) \quad a^n b^n = (ab)^n$$

$$iii) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$iv) \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

$$v) \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Signos de una potencia

- Si elevamos un número, positivo o negativo, a un exponente par, el resultado siempre es positivo.

$$(\pm b)^{2n} = b^{2n}$$

- Si elevamos un número negativo a un exponente impar, el resultado es negativo.

$$(-b)^{2n+1} = -(b^{2n+1})$$

Ejercicios:

1. $(-8)^2 =$

3.

$$-(4)^4 =$$

2. $-(2)^5 =$

4.

Resuelva los siguientes ejercicios, usando las propiedades:

1) $(-x^2)^5$

2) $b^{-2} \cdot b^6$

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 : 5^{-2}$

4) $(x^2 pq^2)^2 (xp^2)^{-1}$

5) $(x^2 yz)^3 : (xy)^4$

$$6) \frac{(-y^{-1})^{-3}}{(-y^2)^{-2}}$$

$$7) \frac{(-3x)^2}{-3x^2}$$

$$8) \frac{a^{-3} \cdot b^{-2}}{c^{-4} \cdot d^{-5}} : \frac{a^{-2} \cdot b^3}{c^{-1} \cdot d^{-1}}$$

$$9) \left(\frac{x^{-2}}{x^{-3}} \right)^{-5} \left(\frac{x^{-3}}{x^1} \right)^{-2} \left(\frac{x^1}{x^{-2}} \right)^{-1}$$

$$10) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-2} + \left(\frac{5}{3} \right)^{-1} \right] : \left[3 - \left(\frac{5}{8} \right)^{-1} \right]$$

L1) Iguale las bases y reduzca

$$\frac{8^{-2} \cdot 16^3}{(0,5)^{-1} \cdot (0,25)^5} =$$



Raíces

Definición:

$$X = \sqrt[n]{c} \Leftrightarrow X^n = c$$

Donde: n es el índice
 c es el subradical
 x es la raíz n-ésima de c.

Observación:

Si n es par “c” debe ser un número positivo o 0.

Si n es impar “c” es un número real.

Ejercicios: Calcule , si es posible.

$$\sqrt{100} = \quad \sqrt{64} = \quad \sqrt[3]{27} = \quad \sqrt[6]{-64} =$$

$$\sqrt{-9} = \quad \sqrt[3]{-125} = \quad \sqrt[5]{243} = \quad \sqrt[3]{-64} = \quad -\sqrt[4]{64} =$$

Propiedades

1. Relación de la raíz y la potencia $\sqrt[p]{a^q} = a^{q/p}$

2. Multiplicación de raíces de igual índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

3. División de raíces de igual índice $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

4. Suma y resta

Sólo podemos sumar o restar raíces idénticas, conservando la raíz y sumando los números que la anteceden.

$$a \sqrt[n]{x} + b \sqrt[n]{x} = (a + b) \sqrt[n]{x}$$

Ejercicios: Realice las siguientes operaciones

a. $5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

b. $8\sqrt{2} - 17\sqrt{2} + \sqrt{2} =$

c. $11 - 3\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 7 =$

5. Composición $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

Ejercicios:

a. $5\sqrt{6} =$

b. $2\sqrt[3]{3} =$

6. Descomposición $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$

Ejercicios:

a. $\sqrt{18} =$

b. $\sqrt{200} + \sqrt{50} =$

c. $\sqrt{27} - 2\sqrt{75} =$

Ejercicios propuestos

Calcule

$$1. \quad \frac{\sqrt[3]{-64} + \sqrt{169} - \sqrt[4]{16}}{2\sqrt[3]{27} + 4\sqrt[3]{8}} =$$

Resuelva usando propiedades:

$$2. \quad \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{3} =$$

$$3. \quad \sqrt{a^2} : \left(\sqrt[3]{a}\right)^6 =$$

Descomponga y reduzca

4. $\sqrt{28} - \sqrt{63} + \sqrt{112} - 17\sqrt{7}$

5. $(-5\sqrt{32} + 7\sqrt{8} - 2\sqrt{242}) : \sqrt{2}$

6.
$$\frac{2\sqrt{12} + 3\sqrt{363} - 4\sqrt{108}}{2\sqrt{192} - 5\sqrt{507}} =$$

5. Racionalización.

Consiste en dejar el denominador de una fracción en forma racional, es decir sin raíces. Al racionalizar, el valor de la expresión no varía por que se multiplica por un “uno” especial.

6.1. **Raíz cuadrada en el denominador.** Se multiplica arriba y abajo por la raíz que aparece en el denominador

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Ejercicios: Racionalice

a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

b. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

c. $\frac{12}{\sqrt{3}}$

6. 2. Racionalizar una suma (o resta) de raíces cuadradas en el denominador.

Se debe multiplicar por la misma expresión con el signo contrario (arriba y abajo).

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}$$

Ejercicios: Racionalice

a. $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$

b. $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} =$

Álgebra

Expresiones algebraicas (EA)

Definición: Es una combinación de números y letras relacionados entre si mediante operaciones aritméticas como: sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces, etc.

Ej:

$$3x^2 - 7x + 4\sqrt{x} - 9$$

Clasificación de expresiones algebraicas.

Monomios: $2x^3$, $-5y^2$, $7/t$, 3 , $2xy/z$

Binomios: $2x+3$, $3x^2-5/y$, $6x^2y-5zt$

Trinomios: $5x^2+7x-1$, $2x^3+4x-3/x$, $6y^2-5x+t$

Términos semejantes

Son aquellos términos o monomios que tienen los mismos factores literales e igual exponente.

Ejemplos: $-5x^3$ y $7x^3$
 $10x^2y^7$ y $-2y^7x^2$

Reducción de Términos Semejantes

Los términos semejantes siempre se pueden reducir a un solo término y para ello se suman o restan los coeficientes numéricos, según corresponda, y se conserva la parte literal. Los términos que no son semejantes NO se pueden reducir.

Ej: Reduzca los términos semejantes en las siguientes expresiones algebraicas:

a. $(4xy + 5x^2y - 6x^3) + (3y^3 - 6xy^2 + 7xy + x^3 - 2x^2y)$

b. $(7t^2 + 6t - 1) - (3t - 5t^2 + 4 - t^3)$

c. $(x^2 + 3xy + 4y^2) - (2x^2 - xy + 3y^2 - 5)$

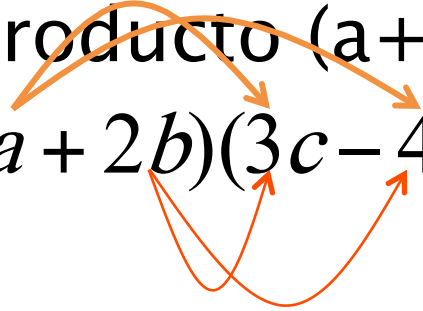
d. $(2\sqrt{x} + \sqrt{2y}) - (\sqrt{x} - 2\sqrt{2y})$

e. $(5\sqrt{xy} - 3) - (2 - 4\sqrt{xy})$

f. $4(2x + 3y) + 2(5y + 3x)$

Multiplicación de binomios

Cuando se multiplican dos expresiones algebraicas a la vez, la propiedad distributiva puede usarse más de una vez con la finalidad de suprimir los paréntesis. Consideremos el producto $(a+2b)(3c-4d)$


$$(a+2b)(3c-4d) = 3ac - 4ad + 6bc - 8bd$$

Ejercicios: Multiplique los siguientes binomios

a. $(x-1)(x^2+2) =$

b. $\left(2xy - \frac{x}{y}\right)\left(xy^2 + \frac{2y}{x}\right) =$

c. $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)(x^3 + 2x) =$

Ejercicios

Reduzca al mínimo la expresión algebraica y luego evalúe

a. $x = -1$
$$-3\{x^2 - 5[x + 2(3 - 5x)]\}$$

b.

$$2\{a^2 - 2a[3a - 5(a^2 - 2)]\} + 7a^2 - 3a + 6$$

c.

$$2a\{(a + 2)(3a - 1) - [a + 2(a - 1)(a + 3)]\}$$

d.

Productos notables

Usando las propiedades de potencias y los axiomas de IR se tienen los siguientes productos notables:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

Suma por diferencia : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Cuadrado de binomio : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Cubo de binomio : $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Ejercicios: reduzca las siguientes expresiones usando productos notables:

a. $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}y)^2 =$

b. $(4x + 5z)^3 + (4x - 5z)^3$

c. $3[(t + u)^2 + (t + u)(t - u) - (t - u)^2]$

Factorización

Factorizar una expresión algebraica consiste en escribirla en forma de multiplicación. Las formas más comunes son:

1. Factor común (monomio y polinomio)

Se factoriza por el factor común de cada término.

$$3xy + 4xy - 6xy =$$

Ejemplo: Factorice:

2. Factor común por agrupación de términos

$$3xy + 6xz - 6my - 12mz =$$

Ejemplo: Factorice

3. Resultado de productos notables

a. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

b. Resta de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

c. Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

d. Trinomios ordenados

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

$$b = m + n$$

$$c = m \cdot n$$

Ejercicios: Factorice

a. $3t^2 - 108a^2$

b. $5x^2 - 20y^2$

c. $x^3y - 25xy^3$

d. $x^5 - 4x^3y^2$

e. $x^2 + 3x + 2$

f. $x^2 + 5x + 6$

g. $x^2 - 5x - 6$

h. $x^2 + x - 2$

i. $x^2 + 6x - 16$

j. $x^2 - 11x + 18$

k. $x^2 - 5x - 24$

l. $x^2 + 8x + 9$

m. $x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$

n. $x^3y - 8 + 8y - x^3$

o. $(x + y)^3(3x - 2y)^4 + 2(x + y)^4(3x -$

p. $2(a - b)^2(a + b)^3 - 5(a + b)^2(a - b)$

e. Factorización de $ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned}(ax^2 + bx + c) \cdot \frac{a}{a} &= \frac{a^2 x^2 + b(ax) + ac}{a} \\&= \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} \quad \text{si } X = ax \\&= \frac{X^2 + bX + ac}{a} = \frac{(X+r)(X+s)}{a} \quad \text{donde } b = r + s \quad \text{y} \quad ac = rs\end{aligned}$$

Ejercicios: Factorice

- a. $3x^2 - 16x + 5$
- b. $5x^2 - 7x - 6$
- c. $6y^2 + 11y - 21$
- d. $8x^2 - 14x - 15$

Fracciones algebraicas

El término fracción algebraica se emplea por lo general para indicar la razón de dos expresiones que contienen una o más variables, tales como las siguientes:

$$\frac{x^2 - 7x + 5}{2x + 3} \quad y \quad \frac{x^2 y + xy^2}{x - y}$$

Simplificación de fracciones: Primero factorizo y luego simplifico.

Ejercicios: Simplifique las siguientes fracciones:

1. $\frac{2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x + 3}$

2. $\frac{4x^2 - 20x + 24}{6 + 10x - 4x^2}$

3. $\frac{x^2 - 5x + 6}{3 + 5x - 2x^2}$

Adición y sustracción de fracciones algebraicas

Dos o más fracciones que tienen un común denominador pueden sumarse o restarse simplemente sumando o restando sus numeradores, manteniendo sin cambio el denominador.

Ejercicio: $\frac{2x+3}{x+1} + \frac{x-1}{x+1}$

Si tienen distinto denominador, debe calcularse el denominador común. En algunos casos, si es posible primero se debe factorizar.

Ejercicios: Reduzca al mínimo las siguientes fracciones.

$$\frac{2x+1}{x+2} + \frac{x-1}{3x-2} \quad \frac{4x+2}{x^2-1} - \frac{3}{x-1}$$

1. 2.

Ejercicios propuestos: Simplifique a la mínima expresión.

3. $\sqrt{1-x^2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $\frac{5}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x^2-4x+4}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Dos o más fracciones pueden multiplicarse a la vez simplemente multiplicando sus numeradores y denominadores.

En algunas ocasiones conviene factorizar, simplificar y luego multiplicar.

Ejercicios: Multiplique las siguientes fracciones.

1.
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{6x^2 + 18x + 12} \cdot \frac{4x^2 - 16}{2x^2 - 5x - 3}$$

2.
$$\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 2x - 15} \cdot \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 - 49}$$

3.

Ejercicios propuestos

4.
$$\frac{4x+2}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2+4x+1}{2x+1} \div \frac{3}{x-1}$$

5.
$$\frac{x+2-\frac{4}{x-1}}{\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}}$$

7.
$$\frac{2x^4-2x}{2x^2-5x-3} \cdot \frac{2x^2-3x-2}{x^3+x^2+x}$$

6.
$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-6x+8} \cdot \frac{2x^2+9x+4}{2x^2+7x+3}$$

8.
$$\left(3 + \frac{1}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3x-2}\right)$$

7. $\left(x - \frac{3}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{9}{x^2-9} - 1\right)$

8. $\frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2-3x+2}$

9. $\frac{3x^2-x-2}{x^2-x-2} \div \frac{3x^2+5x+2}{2x^2-5x+2}$

10. $\frac{2x^2+x-1}{2x^2+10x+12} \div \frac{1-4x^2}{4x^2+8x-12}$